

# TD20–Correction

## Exercice 1:

- $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . En utilisant la somme des probabilités des évènements du système complet associé à la variable  $X$ , on obtient  $a = \frac{1}{10}$ .
- $P(X \leq 0) = P((X = -2) \cup (X = -1) \cup (X = 0)) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{2}{5}$  car les évènements sont incompatibles.  
De même  $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{10}$ .  
et  $P(|X| \leq 1) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{2}$ .
- $Y(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$   
 $\forall k \in Y(\Omega), P(y = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k - 1)$

On obtient :

$k$	-1	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

$Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$  et :

$k$	0	1	2	3
$P(Z = k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

## Exercice 2:

$\Omega = \{C_1, C_2, C_3\}^3$  donc  $\text{Card}(\Omega) = 3^3$ .

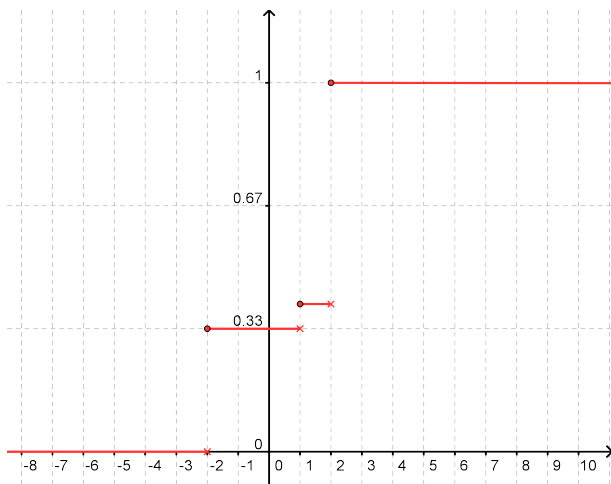
$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ . On considère sur l'univers ( $\Omega$ ) la probabilité uniforme (les tirages sont aléatoires avec remise). On pourrait aussi considérer la répétition (3 fois) d'un tirage avec probabilité uniforme et indépendance des tirages.

$$P(X = 1) = \frac{\text{Card}(X=1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9}$$

$$P(X = 3) = \frac{\text{Card}(X=3)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = \frac{2}{3} \text{ en utilisant le système complet associé à } X$$

## Exercice 3:



- 
- |            |               |                |               |
|------------|---------------|----------------|---------------|
| $k$        | -2            | 1              | 2             |
| $P(X = k)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{3}{5}$ |
- $P(X \leq 0) = P(X = -2) = \frac{1}{3}$
- $Y(\Omega) = \{-1, \frac{1}{2}, 1\}$

$k$	-1	$\frac{1}{2}$	1
$P(Y = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{6}{15} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$Z(\Omega) = \{0, 3, 4\}$$

$k$	0	3	4
$P(Z = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ \frac{6}{15} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

**Exercice 4:**

$$1. F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$2. F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$3. F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{5}{12} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{9}{12} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$4. F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \frac{2}{6} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{4}{6} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ \frac{5}{6} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

**Exercice 5:**

$$1. \begin{array}{|c|c|c|} \hline k & -2 & 2 \\ \hline P(Z = k) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

$$2. \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline k & 0 & 0,5 & 0,75 & 1 \\ \hline P(U = k) & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

**Exercice 6:**

1.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$
2.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$
3.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(32)$
4.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, \frac{1}{3})$
5.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p, \frac{6}{10})$
6.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 2 \rrbracket)$
7.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(7)$
8.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{5})$

**Exercice 7:**

1.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{10})$ , en considérant qu'une personne peut être tirée plusieurs fois.  
 $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} (\frac{1}{10})^k (\frac{9}{10})^{n-k}$
2.  $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (\frac{9}{10})^n$

3. Si  $n$  est impair alors il est impossible d'avoir autant de droitiers que de gauchers.

Si  $n$  est pair alors  $\exists n' \in \mathbb{N}, n = 2n'$

$$P(X = n') = \binom{2n'}{n'} \left(\frac{1}{10}\right)^{n'} \left(\frac{9}{10}\right)^{2n'-n'} = \binom{2n'}{n'} \left(\frac{9}{100}\right)^{n'}$$

**Exercice 8:**

1.  $S(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$  et  $T(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$

on détermine la probabilités des événements  $(S = i) \cap (T = j)$  que l'on résume dans le tableau ci-dessous.

	T			
		-1	0	1
S				
0		0	$(1-p)^2$	0
1		$p(1-p)$	0	$p(1-p)$
2		0	$p^2$	0

En effet :

$$P((S = 0) \cap (T = -1)) = P((U_1 = \frac{-1}{2}) \cap (U_2 = \frac{1}{2})) = P(\emptyset) = 0 \text{ (évènement impossible)}$$

$$P((S = 0) \cap (T = 0)) = P((U_1 = 0) \cap (U_2 = 0)) = P(U_1 = 0) \times P(U_2 = 0) = (1-p)^2 \text{ par indépendance des variables.}$$

etc.....

Déterminons les lois de  $S$  et  $T$  à l'aide des probabilités d'intersection trouvées précédemment grâce à la formule des probabilités totales, pour  $S$  dans le système complet d'événements lié à  $T$ , pour  $T$  dans le système complet d'événements lié à  $S$ .

Pour  $i \in S(\Omega)$  :

$$P(S = i) = \sum_{k=-1}^1 P(S = i \cap T = k)$$

Pour  $i \in T(\Omega)$  :

$$P(T = i) = \sum_{k=0}^2 P(S = k \cap T = i)$$

On résume cela dans le tableau ci-dessous :

	T				
		-1	0	1	
S					loi de S
0		0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1		$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2		0	$p^2$	0	$p^2$
loi de T		$p(1-p)$	$1-2p+p^2$	$p(1-p)$	

On a par exemple  $P(S = 2) \times P(T = 1) \neq P((S = 2) \cap (T = 1))$  donc  $S$  et  $T$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 9:**

1.  $T(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $B(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$T$  suit une loi uniforme de paramètre  $n$ .

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  :

— si  $j > i$  alors  $P(T = i \cap B = j) = 0$ .

— si  $j \leq i$  alors d'après la formule de probabilité composée avec  $P(T = i) \neq 0$  :

$$P(T = i \cap B = j) = P(T = i) \times P_{T=i}(B = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{ni}$$

$$P(T = B) = \sum_{i=1}^n P(T = i \cap B = i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

2.  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$P(B = j) = \sum_{i=1}^n P(T = i \cap B = j)$$

$$P(B = j) = \sum_{i=j}^n \frac{1}{ni} = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$$

$$E(B) = \sum_{j=1}^n jP(B = j) = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$$

$$E(B) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n \frac{j}{i}$$

$$E(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{j}{i}$$

$$E(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i j$$

$$E(B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2}$$

$$E(B) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1)$$

$$E(B) = \frac{n+3}{4}$$

**Exercice 10:**

1. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements lié à  $X$  :

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^n P(X = Y \cap X = i) = \sum_{i=1}^n P(Y = i \cap X = i) = \sum_{i=1}^n P(Y = i)P(X = i) = \frac{1}{n}$$

En utilisant l'indépendance pour dire que  $P(Y = i \cap X = i) = P(Y = i)P(X = i)$ .

2. On a  $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2, 2n \rrbracket$ . Soit  $k \in (X + Y)(\Omega)$ . Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements lié à  $X$  :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^n P(X + Y = k \cap Y = i) = \sum_{i=1}^n P(X = k - i \cap Y = i)$$

Et il faut que  $1 \leq k - i \leq n$  donc que  $i \leq k - 1$  et  $k - n \leq i$ .

Faisons deux cas. Si  $1 \leq k \leq n + 1$  :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = k - i \cap Y = i) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = k - i)P(Y = i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$$

Si  $n + 2 \leq k \leq 2n$  :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=k-n}^n P(X = k - i \cap Y = i) = \sum_{i=k-n}^n P(X = k - i)P(Y = i) = \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}$$

**Exercice 11:**

1. On sait que pour  $x \neq 1$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Par dérivation des deux expressions, on obtient le résultat attendu.

2.  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

Notons  $F_i$  : le  $i$ ème lancer donne face et  $P_i$  : le  $i$ ème lancer donne pile.

$P(X = 0) = P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = P(F_1) \times \dots \times P(F_n) = (1 - p)^n$  par indépendance des lancers.

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = k) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k) = (1 - p)^{k-1}p$  par indépendance des lancers.

On a alors :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n kP(X = k) = p \sum_{k=1}^n k(1 - p)^{k-1}$$

Soit d'après la question précédente :

$$E(X) = \frac{n(1-p)^{n+1} - (n+1)(1-p)^{n+1} + 1}{p}$$

3.  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{1\}$ .

$\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , on a :

$$P(X = i \cap Y = j) = 0 \text{ si } 0 < j \leq i$$

$$P(X = 0 \cap Y = 0) = (1 - p)^n$$

$$P(X = 0 \cap Y = j) = 0 \text{ si } j \geq 1$$

$$P(X = i \cap Y = 0) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_n) = p(1-p)^{n-1} \text{ si } i \geq 1$$

$$P(X = i \cap Y = j) = P(F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_{j-1} \cap P_j) = p^2(1-p)^{j-2} \text{ si } i \geq 1 \text{ et } j \geq i+1.$$

On en déduit la loi de  $Y$  :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=0}^n P((X = i) \cap (Y = 0)) = (1-p)^n + \sum_{k=1}^n p(1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$$

puis  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$P(Y = k) = \sum_{i=1}^n P((X = i) \cap (Y = k)) = \sum_{i=1}^{k-1} p^2(1-p)^{k-2} = p^2(k-1)(1-p)^{k-2}$$

### Exercice 12:

- Notons  $Y$  le nombre de piles obtenus sur les 10 lancers.

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$$

$$p = P(Y = 0) + P(Y = 10) = \frac{1}{512}$$

- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{512})$

$$m = E(X) = \frac{n}{512} \text{ et } V(X) = \frac{511n}{262144} \text{ d'où } \sigma(X) = \frac{\sqrt{511n}}{512}$$

### Exercice 13:

- $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 100 \rrbracket)$

$$\forall k \in \llbracket 0, 100 \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{101}$$

- $Y = |X - 50|$

$$Y(\Omega) = \llbracket 0, 50 \rrbracket$$

$$P(Y = 0) = \frac{1}{101}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, 50 \rrbracket, P(Y = k) = P(X - 50 = k) + P(X - 50 = -k) = \frac{2}{101}$$

- $E(Y) = \sum_{k=0}^{50} kP(Y = k) = \frac{2}{101} \sum_{k=1}^{50} k = \frac{2550}{101}$

$$\text{D'après la formule de Koenig Huygens, } V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$\text{D'après la formule de transfert, } E(X^2) = \sum_{k=0}^{50} k^2 P(Y = k) = \frac{2}{101} \sum_{k=1}^{50} k^2 = \frac{50 \times 51 \times 101}{101} = 2550$$

$$\text{Ainsi } V(X) = 2550 - \left(\frac{2550}{101}\right)^2$$

### Exercice 14:

Calculons  $E(W^2)$ .

**Méthode 1 :** On utilise le théorème de transfert.

$$\begin{aligned}
 E(W^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 P(W = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= n \sum_{k=1}^n (k-1+1) \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= n \sum_{k=2}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} + n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} + n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-k-2} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} \\
 &= n(n-1) p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} + n p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\
 &= n(n-1) p^2 + n p \text{ En utilisant la formule du binôme de Newton}
 \end{aligned}$$

**Méthode 2 :** D'après le théorème de Koenig Huygens  $V(W) = E(W^2) - E(W)^2$ . Donc

$$E(W^2) = V(W) + E(W)^2 = np(1-p) - n^2 p^2$$

Calculons  $E\left(\frac{1}{W+1}\right)$ . On utilise le théorème de transfert.

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{1}{W+1}\right) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} P(W = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n+1-k-1} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{p} \left( \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{p} \left( 1 - (1-p)^{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

**Je me perfectionne !**

### Exercice 15:

1. Soit  $t \in \mathbb{R}$ , d'après le théorème de Transfert, on a :

$$f_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k P(X = k).$$

Donc la fonction  $f_X$  est une fonction polynomiale donc elle est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_X(t) = \sum_{k=0}^n kt^{k-1}P(X = k)$  et  $f''_X(t) = \sum_{k=0}^n k(k-1)t^{k-2}P(X = k)$ . D'où  $f'_X(1) = \sum_{k=0}^n kP(X = k) = E(X)$  et  $f''_X(1) = \sum_{k=0}^n k(k-1)P(X = k) = E(X(X-1))$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ . Déterminons  $f_X$ .  
Soit  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \sum_{k=0}^n t^k P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (tp + 1 - p)^n \text{ d'après la formule du binôme de Newton.} \end{aligned}$$

On obtient donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f'_X(t) = np(tp + 1 - p)^{n-1}$ .

D'où  $E(X) = f'_X(1) = np$ .

Retrouvons la variance.

D'après le théorème de Koenig-Huygens, on a  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

Il reste à déterminer  $E(X^2)$ . Par linéarité de l'espérance, on a  $E(X^2) = E(X^2 - X + X) = E(X^2 - X) + E(X)$ .

D'après la question 1, on a  $E(X^2 - X) = f''_X(1) = n(n-1)p^2$ .

On obtient  $V(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$ .

**Exercice 16:**

On note  $X$  le nombre de piles obtenus.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

On a alors  $Y = 2^X$  le gain du joueur.

On cherche donc  $E(Y) = E(2^X) = \sum_{k=0}^n 2^k P(X = k)$  d'après la formule de transfert.

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k}$$

$E(Y) = (2p + (1-p))^n$  d'après le binôme de Newton.

$$E(Y) = (p + 1)^n$$

**Exercice 17:**

1. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{R}_n : \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  est vraie

Initialisation Pour  $n = 0$  on a  $\sum_{k=1}^n k^3 = 0$ . (la somme ne contient aucun terme) et  $\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 0$ . Donc  $\mathcal{R}_0$  est vraie.

Hérédité Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{R}_n$  vraie et montrons que  $\mathcal{R}_{n+1}$  est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. Donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left( \frac{n^2}{4} + (n+1) \right) = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Donc  $\mathcal{R}_{n+1}$  est vraie.

Donc par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

2. Dans cette question on propose pour les deux premiers calculs deux façon de faire les calculs : l'une avec des changements d'indice bien choisis, l'autre sans (beaucoup plus fastidieuse d'un point de vue calcul). Moralité : un peu de réflexion peut nous éviter des calculs difficiles.  
 $G$  étant une variable aléatoire. Les événements  $(G = k)$  pour  $k$  allant de 2 à  $2n$  forment un système complet d'événements. Donc

$$\sum_{k=2}^{2n} \left( \frac{1}{n} - \alpha |k - n - 1| \right) = 1$$

**Méthode 1 :** Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2n} |k - n - 1| &= \sum_{k=2}^{n+1} |k - n - 1| + \sum_{k=n+2}^{2n} |k - n - 1| \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} (-k + n + 1) + \sum_{k=n+2}^{2n} (k - n - 1) \end{aligned}$$

On pose  $i = k - 1$  dans la première somme et  $j = k - n - 1$  dans la seconde.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2n} |k - n - 1| &= \sum_{k=2}^{n+1} (-k + n + 1) + \sum_{k=n+2}^{2n} (k - n - 1) \\ &= \sum_{i=1}^n (n - i) + \sum_{j=1}^{n-1} j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) + \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} n \\ &= n(n - 1) \end{aligned}$$

**Méthode 2 :** Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2n} |k - n - 1| &= \sum_{k=2}^{n+1} |k - n - 1| + \sum_{k=n+2}^{2n} |k - n - 1| \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} (-k + n + 1) + \sum_{k=n+2}^{2n} (k - n - 1) \\ &= -\sum_{k=2}^{n+1} (k) + n(n + 1) - (n - 1)(n + 1) + \sum_{k=n+2}^{2n} k \\ &= n + 1 - \frac{(n + 3)n}{2} + \frac{(3n + 2)(n - 1)}{2} \\ &= \frac{2n + 2 - n^2 - 3n + 3n^2 - n - 2}{2} = \frac{2n^2 - 2n}{2} = n(n - 1) \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=2}^{2n} \left( \frac{1}{n} - \alpha |k - n - 1| \right) = \frac{2n - 1}{n} - \alpha n(n - 1)$$

Donc

$$\frac{2n - 1}{n} - \alpha n(n - 1) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{n^2}$$

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=2}^{2n} k \left( \frac{1}{n} - \alpha |k - n - 1| \right) \\
&= \sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{n} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{2n} k |k - n - 1| \\
&= \sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{n} - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=2}^{n+1} k(-k + n + 1) + \sum_{k=n+2}^{2n} k(k - n - 1) \right)
\end{aligned}$$

**Méthode 1** On pose  $i = k - 1$  dans la deuxième somme et  $j = k - n - 1$  dans la troisième.

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{k=2}^{2n} \frac{k}{n} - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n (i+1)(n-i) + \sum_{j=1}^{n-1} (j+n+1)j \right) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)(n-i) + \sum_{i=1}^{n-1} (i+n+1)i \right) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} ni + n - i^2 - i + i^2 + ni + i \right) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^{n-1} 2ni + n \right) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^{n-1} (2i+1) \right) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{1}{n} ((n-1)n + n - 1) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{(n-1)(n+1)}{n} \\
&= \frac{n(n+1)}{n} = n + 1
\end{aligned}$$

**Méthode 2**

$$\sum_{k=2}^{n+1} k(-k+n+1) = (n+1) \sum_{k=2}^{n+1} k - \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)n(n+3)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} + 1 = \frac{n(n-1)(n+4)}{6}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{2n} k(k-n-1) &= \sum_{k=n+2}^{2n} k^2 - (n+1) \sum_{k=n+2}^{2n} k \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(3n+2)(n-1)(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(11n+4)}{6} \\
&= \frac{n(5n^2 - 3n - 2)}{6}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E(G) &= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n-1)(n+4)}{6} + \frac{n(5n^2 - 3n - 2)}{6} \right) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{1}{n} \left( \frac{n^2 + 3n - 4}{6} + \frac{5n^2 - 3n - 2}{6} \right) \\
&= \frac{(2n-1)(n+1)}{n} - \frac{n^2 - 1}{n} \\
&= \frac{(2n-1-n+1)(n+1)}{n} \\
&= n + 1
\end{aligned}$$

Utilisons une fois n'est pas coutume la définition de la variance

$$\begin{aligned} V(G) &= E((G - E(G))^2) = \sum_{k=2}^{2n} (k - n - 1)^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{|k - n - 1|}{n^2} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} (k - n - 1)^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{-k + n + 1}{n^2} \right) + \sum_{k=n+2}^{2n} (k - n - 1)^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{k - n - 1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

On pose  $i = k - 1$  dans la première somme et  $j = k - n - 1$  dans la seconde.

$$\begin{aligned} V(G) &= \sum_{i=1}^n (i - n)^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{n - i}{n^2} \right) + \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{j}{n^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (i - n)^2 \frac{i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{i}{n^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 + n^2 - 2in) \frac{i}{n^2} + i^2 \left( \frac{1}{n} - \frac{i}{n^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^3}{n^2} + i - \frac{2i^2}{n} + \frac{i^2}{n} - \frac{i^3}{n^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{i^2}{n} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n^2 - 1}{6} \end{aligned}$$

3.  $G \in \llbracket m, 2n + 2 - m \rrbracket = \bigcup_{k=m}^{2n+2-m} (G = k)$ . Les événements dans l'union sont deux à deux incompatibles donc :

$$\begin{aligned} P(G \in \llbracket m, 2n + 2 - m \rrbracket) &= \sum_{k=m}^{2n+2-m} \left( \frac{1}{n} - \frac{|k - n - 1|}{n^2} \right) \\ &= \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{n} - \frac{|k - n - 1|}{n^2} \right) + \sum_{k=n+2}^{2n+2-m} \left( \frac{1}{n} - \frac{|k - n - 1|}{n^2} \right) \end{aligned}$$

On pose  $i = k - m + 1$  dans la première somme et  $j = k - n - 1$  dans la seconde.

$$\begin{aligned} P(G \in \llbracket m, 2n + 2 - m \rrbracket) &= \sum_{i=1}^{n-m+1} \left( \frac{1}{n} - \frac{n - i - m + 2}{n^2} \right) + \sum_{j=1}^{n-m+1} \left( \frac{1}{n} - \frac{j}{n^2} \right) \\ &= \sum_{k=m}^{2n+2-m} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{n-m+1} \left( \frac{n - i - m + 2}{n^2} + \frac{i}{n^2} \right) \\ &= \frac{2n + 3 - 2m}{n} - \frac{(n - m + 2)(n - m + 1)}{n^2} \\ &= 1 - \frac{(m - 1)(m - 2)}{n^2} \end{aligned}$$

### Exercice 18:

- L'univers image est  $X(\Omega) = \llbracket 2, n + 2 \rrbracket$ .  
Soit  $i \in \llbracket 2, n + 2 \rrbracket$ , notons  $M_i$  l'événement le  $i$ ème animal capturé est un mâle.  
Soit  $k \in \llbracket 2, n + 2 \rrbracket$

$$\text{Montrons que } (X = k) = \bigcup_{j=1}^{k-1} \left[ \left( \bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \overline{M}_i \right) \cap M_j \cap M_k \right].$$

L'événement  $(X = k)$  est l'événement le deuxième mâle a été capturé à la kieme tentative. Donc dans les  $k - 1$  premières tentatives, il y a eu la capture du premier mâle (notons  $i$  le numéro de sa capture) et de  $k - 2$  femelles. Donc un événement élémentaire de  $(X = k)$  est  $\bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \overline{M}_i \cap M_j \cap M_k$ .

$(X = k)$  est donc l'union de ces événement. On obtient :

$$(X = k) = \bigcup_{j=1}^{k-1} \left[ \left( \bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \overline{M}_i \right) \cap M_j \cap M_k \right].$$

2. Soit  $k \in \llbracket 2, n + 2 \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} \left[ \left( \bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \overline{M}_i \right) \cap M_j \cap M_k \right] \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} P \left( \left( \bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \overline{M}_i \right) \cap M_j \cap M_k \right) \text{ car les événements sont incompatibles.} \end{aligned}$$

Il reste à déterminer pour tout  $j \in \llbracket 2, k - 1 \rrbracket$ ,  $A = P \left( \left( \bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{k-1} \overline{M}_i \right) \cap M_j \cap M_k \right)$ . Soit  $j \in \llbracket 2, k - 1 \rrbracket$ , On utilise la formule de probabilités composée généralisée.

$$A = P \left( \bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i \right) \cdot P_{\bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i} (M_j) \cdot P_{\bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i \cap M_j} \left( \bigcap_{i=j+1}^{k-1} \overline{M}_i \right) \cdot P_{\bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i \cap M_j \cap \bigcap_{i=j+1}^{k-1} \overline{M}_i} (M_k)$$

Or en utilisant à nouveau la formule de probabilité composée, on trouve

$$\begin{aligned} P \left( \bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i \right) &= \frac{\frac{n!}{(n-j+1)!}}{\frac{(n+2)!}{(n+2-j+1)!}} \\ P_{\bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i} (M_j) &= \frac{2}{(n+2-(j-1))} \\ P_{\bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i \cap M_j} \left( \bigcap_{i=j+1}^{k-1} \overline{M}_i \right) &= \frac{\frac{(n-j+1)!}{(n-k+1)!}}{\frac{(n+1-j+1)!}{(n+1-k+1)!}} \\ P_{\bigcap_{i=1}^{j-1} \overline{M}_i \cap M_j \cap \bigcap_{i=j+1}^{k-1} \overline{M}_i} (M_k) &= \frac{1}{(n+2-(k-1))} \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{n!}{(n-j+1)!}}{\frac{(n+2)!}{(n+2-j+1)!}} \cdot \frac{2}{(n+2-(j-1))} \cdot \frac{\frac{(n-j+1)!}{(n-k+1)!}}{\frac{(n+1-j+1)!}{(n+1-k+1)!}} \cdot \frac{1}{(n+2-(k-1))} \\ &= \frac{2 \frac{n!}{(n-k+1)!}}{\frac{(n+2)!}{(n+1-k)!}} \\ &= 2 \frac{n!}{(n+2)!} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2(k-1)}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

3. Pour obtenir le temps total pour capturer les 2 males, il faut additionner les temps de capture des  $X$  animaux. Le temps de capture étant inversement proportionnel au nombre d'animaux encore libres. On a donc  $T = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+2-(X-1)}$ .  
 On retrouve bien  $T = \sum_{j=1}^X \frac{1}{n+3-j}$ .  
 Calculons l'espérance de  $T$ . On utilise le théorème de transfert.

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \sum_{k=2}^{n+2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{n+3-j} P(X = k) \\
 &= \sum_{k=2}^{n+2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{n+3-j} \frac{2(k-1)}{(n+2)(n+1)} \\
 &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=1}^{n+2} \sum_{j=1}^k \frac{k-1}{n+3-j} \\
 &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{1 \leq j \leq k \leq n+2} \frac{k-1}{n+3-j} \\
 &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{j=1}^{n+2} \sum_{k=j}^{n+2} \frac{k-1}{n+3-j} \\
 &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{n+3-j} \sum_{k=j}^{n+2} k - 1 \\
 &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{n+3-j} \frac{(n+1) + (j-1)}{2} (n+2-j+1) \\
 &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{j=1}^{n+2} (n+1) + (j-1) \\
 &= 1 + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{j=1}^{n+2} j - 1 \\
 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

**Exercice 19:**

1.  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour tomber dans le  $k^{ieme}$  tube, la bille doit avoir fait  $k$  déplacements à droite et  $(n - k)$  déplacements à gauche. Chacun de ces déplacements est aléatoire et a donc une probabilité  $\frac{1}{2}$  de se produire.

Par ailleurs il y a  $\binom{n}{k}$  possibilités de faire  $k$  déplacements à droite et  $(n - k)$  déplacements à gauche. (En effet, cela revient à choisir le rang des  $k$  déplacements à droite parmi les  $n$  déplacements possibles.)

Ainsi  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} (\frac{1}{2})^k \times (\frac{1}{2})^{n-k} = \binom{n}{k} (\frac{1}{2})^n$ .

On reconnaît les paramètres d'une loi binomiale.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

2. On en déduit  $E(X) = \frac{n}{2}$  et  $V(X) = \frac{n}{4}$ .  
 3. Pour  $n = 6$ , on a les gains suivants en fonction du tube atteint :

$X$	0	1	2	3	4	5	6
$G$	6€	4€	2€	0€	2€	4€	6€

Déterminons  $E(G) = \sum_{k=0}^6 |n - 2k| P(X = k)$  d'après la formule de transfert

$$E(G) = 6 \times P(X = 0) + 4 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 2 \times P(X = 4) + 4 \times P(X = 5) + 6 \times P(X = 6)$$

$$E(G) = 6 \times \binom{6}{0} \times (\frac{1}{2})^6 + 4 \times \binom{6}{1} \times (\frac{1}{2})^6 + 2 \times \binom{6}{2} \times (\frac{1}{2})^6 + 2 \times \binom{6}{4} \times (\frac{1}{2})^6 + 4 \times \binom{6}{5} \times (\frac{1}{2})^6 + 6 \times \binom{6}{6} \times (\frac{1}{2})^6$$

$$E(G) = (\frac{1}{2})^6 (6 + 24 + 30 + 30 + 24 + 6)$$

$$E(G) = \frac{120}{64} = \frac{15}{8} = 1,875$$

Par conséquent la partie de doit pas dépasser 1,87 € si on veut que le jeu soit favorable au joueur.

**Exercice 20:**

1. Remarquons que  $U_1 = 1$  (loi certaine).  $U_2$  suit une loi de Bernoulli.

Remarquons que  $T_1$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  puisqu'on tire de façon équiprobable des boules de numérotées de 1 à  $n$ . En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements de probabilité non nulle liés à  $T_1$  :

$$P(U_2 = 0) = \sum_{k=1}^n P(U_2 = 0 \cap T_1 = k) = \sum_{k=1}^n P(T_2 = k \cap T_1 = k) = \sum_{k=1}^n P(T_2 = k | T_1 = k) P(T_1 = k)$$

Or pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$   $P(T_1 = k) = \frac{1}{n}$ . Et la probabilité de tirer la boule  $k$  sachant qu'on l'avait tiré au premier tirage est aussi de  $\frac{1}{n}$  (équiprobabilité).

Donc  $P(U_2 = 0) = \frac{1}{n}$  et  $P(U_2 = 1) = 1 - P(U_2 = 0) = \frac{n-1}{n}$ . (Variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli)

2. Soit  $i \in \mathbb{N}^*$ . Les tirages étant indépendants (faits avec remise),  $T_i$  suit la même loi que  $T_1$  donc une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$

3. Soit  $i \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$  En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements de probabilité non nulle liés à  $T_i$  :

$$\begin{aligned} P(U_i = 1) &= \sum_{k=1}^n P(U_i = 1 \cap T_i = k) = \sum_{k=1}^n P\left((T_i = k) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} T_j \neq k\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n P(T_1 \neq k) P(T_2 \neq k | T_1 \neq k) \cdots P\left(T_i = k \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} T_j \neq k\right) \end{aligned}$$

La dernière égalité étant due à la formule des probabilités généralisées.

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(T_j = k) = \frac{1}{n}$ .

D'autre part les tirages se faisant avec remise, pour  $k$  fixé, les événements  $(T_1 \neq k), (T_2 \neq k), \dots, (T_{i-1} \neq k), (T_i = k)$  sont mutuellement indépendants.

Donc

$$P(U_i = 1) = \sum_{k=1}^n P(T_1 \neq k) P(T_2 \neq k) \cdots P(T_i = k)$$

$$P(T_i \neq k) = P\left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} T_i = j\right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n P(T_i = j) = \frac{n-1}{n}$$

Donc :

$$P(U_i = 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \frac{1}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}$$

On vérifie que pour  $i = 1$ , on retrouve bien  $P(U_1 = 1) = 1$ .

4. (a) On remarque  $V_k(n) = \sum_{j=1}^k U_j$

(b) On utilise la linéarité de l'espérance :

$$E(V_k(n)) = E\left(\sum_{j=1}^k U_j\right) = \sum_{j=1}^k E(U_j) = \sum_{j=1}^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k}{1 - \frac{n-1}{n}}$$

Donc

$$E(V_k(n)) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$$

(c) Pour  $n$  fixé  $0 < \frac{n-1}{n} < 1$  donc  $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(V_k(n)) = n$ .

Pour  $k$  fixé,  $1 - (1 - \frac{1}{n})^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{n}$

Donc  $E(V_k(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} k$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(V_k(n)) = k$ .

**Exercice 21:**

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$$

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$$

Notons  $D_1$  le résultat du premier dé et  $D_2$  celui du deuxième dé.

$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P(Y \leq k) = P((D_1 \leq k) \cap (D_2 \leq k)) = P(D_1 \leq k)P(D_2 \leq k)$  par indépendance des lancers.

Ainsi  $P(Y \leq k) = (\frac{k}{6})^2$

Ainsi  $P(Y = 1) = P(Y \leq 1) = \frac{1}{36}$

et  $\forall k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket, P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}$

On remarque que la formule précédente reste valable quand  $k = 1$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^6 kP(Y = k) = \sum_{k=1}^6 \frac{2k^2 - k}{36} = \frac{161}{36}$$

$$Z(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$$

$\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P(Z \geq k) = P(D_1 \geq k)P(D_2 \geq k)$  par indépendance des lancers.

$$P(Z \geq k) = (\frac{6-k+1}{6})^2 = \frac{(7-k)^2}{36}$$

ainsi :

$$P(Z = 6) = P(Z \geq 6) = \frac{1}{36}$$

puis  $\forall k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket, P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1) = \frac{(7-k)^2 - (7-(k+1))^2}{36} = \frac{13-2k}{36}$

On remarque que la formule reste vraie pour  $k = 6$

$$E(Z) = \sum_{k=1}^6 kP(Z = k) = \sum_{k=1}^6 \frac{13k - 2k^2}{36} = \frac{91}{36}$$

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

**Exercice 22:****Partie A : Étude d'un ensemble de suites**

1. On peut faire une programmation avec une boucle for ou une programmation récursive :

```
def suite(n,x1):
    x=x1
    for k in range(1,n):
        x=(9/10)*x+(3+k)/10
    return x

def suiteRecursive(n,x1):
    if n==1:
        return x1
    else:
        return (9/10)*suite(n-1,x1) + (3+n-1)/10
```

2. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \alpha n + \beta$ .

$$(v_n) \in A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 10v_{n+1} = 9v_n + 3 + n.$$

Soit  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} 10(\alpha(n+1) + \beta) &= 9(\alpha n + \beta) + 3 + n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (\alpha - 1)n + 10\alpha + \beta - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1) = 0 \text{ et } 10\alpha + \beta - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ et } \beta = -7 \end{aligned}$$

La suite de terme général  $v_n = n - 7$  appartient donc à  $A$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} 10y_{n+1} &= 10x_{n+1} - 10v_{n+1} \\ &= 9x_n + 3 + n - (9v_n + 3 + n) \\ &= 9(x_n - v_n) \\ &= 9y_n \end{aligned}$$

Ainsi  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{9}{10}$  de premier terme  $y_1 = x_1 - v_1 = x_1 + 6$ .

donc  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = (x_1 + 6) \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}$

puis  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = (x_1 + 6) \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + n - 7}$

### Partie B : Modélisation informatique

1. Fonction très classique : on considère que les boules de 1 à  $nb$  sont blanches et que les suivantes sont noires. Il y a  $nb+np$  boules dans l'urne.

```
from random import*
def simulB(nb,np):
B=randint(1,np+nb)
if B<=nb :
return 0
else:
return 1
```

2. Deux versions. Dans les deux cas la boucle permet de faire  $n$  tirages. Les variables  $nb$  et  $np$  notent le nombre de boules blanches et noires actuellement dans l'urne.

Dans le deuxième cas on se sert du fait que  $x = 1$  quand la boule est noire et 0 quand elle est blanche (quand  $x = 0$  la composition de l'urne est inchangée, quand  $x = 1$  on retire une boule noire et on ajoute une boule blanche). Enfin on utilise pour le résultat que le nombre de boules blanches tirées plus le nombre de boules noires tirées est égal à  $n$  donc pour avoir le nombre de boules blanches tirées il suffit de retirer à  $n$  le nombre de boules noires tirées :  $7 - np$  (le nombre de boules noires au départ moins le nombre de boules noires à la fin)

```
def simulXn(n):
nb=3
np=7
compt=0
for i in range(n):
x=simulB(nb,np)
if x==0:
compt = compt+1
else :
nb=nb+1
np=np-1
return compt

def simulXn(n):
nb=3
np=7
for i in range(n):
x=simulB(nb,np)
np=np-x
nb=nb+x
return n-(7-np)
```

3. On effectue la moyenne des valeurs trouvées pour  $X_n$  après  $N$  tirages.

```
def simuleXn(n,N):
S=0
for i in range(N):
S=S+simulXn(n)
return S/N
```

4. On utilise une boucle `while` qui s'arrête si  $N$  atteint  $n$  ou s'il n'y a plus de boules noires dans l'urne. On n'utilise surtout pas la fonction `simulXn` dans la boucle ce qui nous donnerait à chaque fois une réalisation différente de l'expérience : le résultat obtenu serait alors faux.

```
def urneBlanche(n):
    nb=3
    np=7
    N=0
    while N<n and np>0:
        x=simulB(nb,np)
        np=np-x
        nb=nb+x
        N=N+1
    return N
```

### Partie C : Expression de la probabilité $P(B_{n+1})$ à l'aide de $u_n$

1. L'univers  $\Omega$  de l'expérience est l'ensemble des 10 boules de l'urne. On munit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  de la probabilité uniforme  $P$ .

$$\text{Ainsi } P(B_1) = \frac{\text{Card}(B_1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{10}$$

On a  $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$  puisque  $X_1$  est le nombre de boules blanches tirées lors du 1er tirage.

$$\text{De plus } P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{3}{10} \text{ donc } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{3}{10}\right) \text{ et } \boxed{u_1 = E(X_1) = \frac{3}{10}}$$

2.  $B_1$  et  $\overline{B_1}$  forment un système complet d'évènements de probabilités non nulles donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \boxed{P(B_2) = \frac{37}{100}} \text{ Par ailleurs } \frac{4 - u_1}{10} = \frac{4 - \frac{3}{10}}{10} = \frac{37}{100}. \text{ Ainsi } \boxed{P(B_2) = \frac{4 - u_1}{10}}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq n \leq 7$  et soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Le nombre de tirage est inférieur ou égal au nombre de boules noires de l'urne. Ainsi même si on ne pioche que des noires, il restera toujours des boules de 2 couleurs jusqu'au  $n$ -ième tirage.

L'évènement  $(X_n = k)$  signifie qu'on a pioché  $k$  boules blanches. Il y a donc eu  $n - k$  boules noires piochées et ensuite remplacées par des blanches. Par conséquent l'urne contient avant le  $(n + 1)$  i-ème tirage  $3 + n - k$  boules blanches sur un total de 10 boules.

$$\text{On a donc } \boxed{P_{(X_n=k)}(B_{n+1}) = \frac{3 + n - k}{10}}$$

La famille  $(X_n = k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est un système complet d'évènements de probabilités non nulles donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n P(X_n = k) \times P_{(X_n=k)}(B_{n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_n = k) \frac{3 + n - k}{10} \\ &= \frac{3 + n}{10} \sum_{k=0}^n P(X_n = k) - \frac{1}{10} \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) \\ &= \frac{3 + n}{10} \times 1 - \frac{1}{10} \times E(X_n) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall n \in \llbracket 1, 7 \rrbracket, P(B_{n+1}) = \frac{3+n-u_n}{10}}$$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}, n > 7$ .

- Si  $k \in \llbracket 0, n-8 \rrbracket$  l'évènement  $(X_n = k)$  signifierait qu'on a pioché  $k$  fois des boules blanches et donc  $n-k$  fois des boules noires. Mais  $0 \leq k \leq n-8 \Leftrightarrow 8 \leq n-k \leq n$ , ce qui est impossible puisque l'urne ne contient que 7 boules noires.

$$\boxed{\text{Si } k \in \llbracket 0, n-8 \rrbracket, \text{ l'évènement } (X_n = k) \text{ est impossible donc } X_n(\Omega) = \llbracket n-7, n \rrbracket}$$

- Si  $k \in \llbracket n-7, n \rrbracket$ .

L'évènement  $(X_n = k)$  signifie donc  $k$  tirages d'une boule blanche et  $n-k$  tirages d'une boule noire.

Cette fois  $n-7 \leq k \leq n \Leftrightarrow 0 \leq n-k \leq 7$ , ce qui est possible compte tenu de la composition initiale de l'urne.

Ainsi après  $n$  tirages l'urne contient donc  $3+n-k$  boules blanches sur un total de 10 boules.

$$\text{D'où } \boxed{P_{(X_n=k)}(B_{n+1}) = \frac{3+n-k}{10}}$$

La famille  $(X_n = k)_{k \in \llbracket n-7, n \rrbracket}$  est un système complet d'évènements de probabilités non nulles donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{k=n-7}^n P(X_n = k) \times P_{(X_n=k)}(B_{n+1}) \\ &= \sum_{k=n-7}^n P(X_n = k) \frac{3+n-k}{10} \\ &= \frac{3+n}{10} \sum_{k=n-7}^n P(X_n = k) - \frac{1}{10} \sum_{k=n-7}^n k P(X_n = k) \\ &= \frac{3+n}{10} \times 1 - \frac{1}{10} \times E(X_n) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n > 7, P(B_{n+1}) = \frac{3+n-u_n}{10}}$$

#### Partie D : Calcul des nombres $u_n$ et $P(B_n)$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket n-6, n \rrbracket$

On a  $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket n-6, n+1 \rrbracket$  et  $X_n(\Omega) = \llbracket n-7, n \rrbracket$ .

Donc pour  $k \in \llbracket n-6, n \rrbracket$  les évènements  $(X_{n+1} = k)$ ,  $(X_n = k)$  et  $(X_n = k-1)$  sont tous de probabilités non nulles.

$$(X_{n+1} = k) = (X_{n+1} = k \cap X_n = k) \cup (X_{n+1} = k \cap X_n = k-1)$$

d'où par incompatibilité  $P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k \cap X_n = k) + P(X_{n+1} = k \cap X_n = k-1)$

En utilisant alors la formule des probabilités composées (avec  $P(X_n = k) \neq 0$  et  $P(X_n = k-1) \neq 0$ ), on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_n = k) \times P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k-1) \times P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) \\ &= P(X_n = k) \times P_{(X_n=k)}(\overline{B_{n+1}}) + P(X_n = k-1) \times P_{(X_n=k-1)}(B_{n+1}) \\ &= P(X_n = k) \times (1 - P_{(X_n=k)}(B_{n+1})) + P(X_n = k-1) \times P_{(X_n=k-1)}(B_{n+1}) \end{aligned}$$

Et d'après la question précédente, on a :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k) \times \left(1 - \frac{3+n-k}{10}\right) + P(X_n = k-1) \times \frac{3+n-(k-1)}{10}$$

$$\text{Finalement } \boxed{P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k) \times \frac{7-n+k}{10} + P(X_n = k-1) \times \frac{4+n-k}{10}}$$

Si  $k = n + 1$  :

$P(X_{n+1} = n + 1) = (\frac{3}{10})^{n+1}$  puisqu'on fait  $n + 1$  tirages successifs indépendant d'une boule blanche avec remise.

$P(X_n = n + 1) = 0$  (évènement impossible)

$P(X_n = n) = (\frac{3}{10})^n$  puisqu'on fait  $n$  tirages successifs indépendant d'une boule blanche avec remise.

Avec ces valeurs, on constate que la formule est toujours vérifiée.

Si  $k = n - 7$  :

$P(X_{n+1} = n - 7) = 0$  (évènement impossible)

$P(X_n = n - 8) = 0$  (évènement impossible)

et  $\frac{7 - n + k}{10} = 0$

Tous les termes de l'expression sont nuls donc la formule est toujours vérifiée.

Si  $k \in \llbracket 1, n - 8 \rrbracket$  :

Les évènements  $(X_{n+1} = k), (X_n = k), (X_n = k - 1)$  sont tous impossibles donc de probabilités nulles. La formule reste vérifiée.

Par conséquent la formule est vraie pour tout  $k \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$u_{n+1} = E(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} kP(X_{n+1} = k)$$

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k \left( P(X_n = k) \times \frac{7 - n + k}{10} + P(X_n = k - 1) \times \frac{4 + n - k}{10} \right) \\ &= \frac{7 - n}{10} \sum_{k=0}^{n+1} kP(X_n = k) + \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_n = k) + \frac{4 + n}{10} \sum_{k=1}^{n+1} kP(X_n = k - 1) \\ &\quad - \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_n = k - 1) \end{aligned}$$

Effectuons un changement d'indice  $i = k - 1$  dans les deux dernières sommes :

$$u_{n+1} = \frac{7 - n}{10} E(X_n) + \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_n = k) + \frac{4 + n}{10} (E(X_n) + 1) - \frac{1}{10} \left( \sum_{k=0}^n k^2 P(X_n = k) + 2E(X_n) + 1 \right).$$

En utilisant les formules d'espérance et la somme des probabilités des évènements d'un systèmes complets, on obtient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= E(X_n) \frac{7 - n + 4 - n - 2}{10} + \frac{4 + n - 1}{10} \\ &= \frac{9}{10} u_n + \frac{3 + n}{10} \end{aligned}$$

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 10u_{n+1} = 9u_n + 3 + n$  donc  $(u_n) \in A$

3. D'après la première partie, puisque  $(u_n) \in A$  :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = (u_1 + 6) \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + n - 7 = \left(\frac{3}{10} + 6\right) \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + n - 7$$

De plus on a vu dans la partie 2 que  $P(B_{n+1}) = \frac{3 + n - u_n}{10}$

$$\text{Donc } P(B_{n+1}) = 1 - \frac{6,3 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}}{10}$$

4. Comme  $-1 < \frac{9}{10} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 0$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_{n+1}) = 1$

En effet, à long terme toutes les boules noires de l'urne auront été remplacées par des blanches et tous les tirages donneront des boules blanches.

**Exercice 23:**

1. L'urne contient 10 boules dont 8 blanches et 2 noires. On prélève des boules dans l'urne tant qu'il reste des boules noires. La probabilité d'obtenir une boule noire est (par équiprobabilité)  $\text{noires}/(\text{blanches}+\text{noires})$  (en notant **noires** et **blanches** le nombre de boules associé à chacune des deux couleurs). On simule cette probabilité en choisissant un nombre pseudo-aléatoire **boule** entre 0 et 1 et en le comparant à ce quotient. À chaque tirage, on ajuste le nombre de boules dans l'urne selon la couleur obtenue. La liste **positions** contient les positions des **tirages** relatifs à l'obtention d'une boule noire. On propose la fonction suivante :

```
def simulation() :
    blanches, noires = 8, 2
    tirages = 0
    positions = []
    while (noires > 0) :
        boule = rd.random()
        tirages += 1
        if (boule < noires/(blanches+noires)) :
            positions.append(tirages)
            noires = noires-1
        else :
            blanches = blanches-1
    return positions
```

En effectuant plusieurs appels de cette fonction dans la console, on obtient les listes suivantes :

[5, 7]                      [5, 10]                      [2, 7]                      [3, 9]

2. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2$ . On distingue deux cas :

★ **Premier cas** :  $j \leq i$

Par définition de  $X_1$  et de  $X_2$ , on a nécessairement  $X_1 < X_2$  donc :

$$(X_1 = i) \cap (X_2 = j) = \emptyset \quad \text{et alors} \quad P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = 0$$

★ **Deuxième cas** :  $i < j$

Comme on prélève toutes les boules successivement et sans remise, l'univers  $\Omega$  associé à cette expérience est l'ensemble des  $N$ -listes sans répétition de l'ensemble des  $N$  boules et  $P$  est la probabilité uniforme (les boules sont deux à deux distinctes quitte à les numéroter). Par conséquent :

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \frac{\text{card}((X_1 = i) \cap (X_2 = j))}{\text{card}(\Omega)}$$

avec  $\text{card}(\Omega) = N!$ . Il reste à dénombrer l'ensemble  $(X_1 = i) \cap (X_2 = j)$ . Pour obtenir les boules noires en positions  $i$  et  $j$  dans le tirage, on doit :

- choisir dans quel ordre on répartit les deux boules noires sur les positions  $i$  et  $j$ , ce qui revient à compter le nombre de permutations de ces deux boules noires (il y a  $2! = 2$  répartitions possibles) ;
- répartir les boules blanches sur les  $N - 2$  positions restantes, ce qui revient à compter le nombre de permutations possibles des boules blanches (soit au total  $(N - 2)!$  répartitions possibles).

On a donc  $\text{card}((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = 2(N - 2)!$  puis :

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \frac{2(N - 2)!}{N(N - 1)(N - 2)!} = \frac{2}{N(N - 1)}$$

La loi du couple  $(X_1, X_2)$  est donc bien donnée par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

On peut tout à fait calculer la probabilité ci-dessus en utilisant la formule des probabilités composées. Pour cela, on introduit, pour tout entier  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , l'événement :

$N_k$  : « on obtient une boule noire au  $k^e$  tirage »

Alors :

$$(X_1 = i) \cap (X_2 = j) = \left( \bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{N_k} \right) \cap N_i \cap \left( \bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{N_k} \right) \cap N_j$$

On utilise ensuite la formule des probabilités composées généralisée qui permet de procéder au calcul des probabilités tirage après tirage. Le raisonnement par dénombrement est plus simple à mettre en œuvre ici.

**3.(a)** Déterminons les lois de  $X_1$  et  $X_2$ . La première boule noire ne peut pas être obtenue au  $N^e$  tirage (car le tirage est sans remise) et les  $N - 1$  premières positions sont possibles donc  $X_1(\Omega) = \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ . De même,  $X_2(\Omega) = \llbracket 2, N \rrbracket$  (on ne peut pas obtenir la deuxième boule noire au premier tirage).

★ **Loi de la variable aléatoire  $X_1$**

Soit  $i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ . Comme  $\{(X_2 = j) \mid j \in \llbracket 2, N \rrbracket\}$  est un système complet d'événements, on a :

$$P(X_1 = i) = \sum_{j=2}^N P((X_1 = i) \cap (X_2 = j))$$

En utilisant la question 2., la relation de Chasles et la linéarité de la somme, on a :

$$P(X_1 = i) = \sum_{j=i+1}^N \frac{2}{N(N-1)} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=i+1}^N 1 = \frac{2(N-i)}{N(N-1)}$$

★ **Loi de la variable aléatoire  $X_2$**

Soit  $j \in \llbracket 2, N \rrbracket$ . En utilisant cette fois le système complet d'événements associé à la variable aléatoire  $X_1$  et la question 2., il vient :

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{N-1} P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \frac{2(j-1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

Finalement :

les lois des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont :

$$\forall k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket, \quad P(X_1 = k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}$$

et :

$$\forall k \in \llbracket 2, N \rrbracket, \quad P(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}$$

**3.(b)** On a  $P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = 0$  (d'après la question 2.) et :

$$P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = \frac{4(N-2)}{N^2(N-1)^2} \neq 0$$

d'après la question 3.(a) et car  $N \geq 3$ . En particulier :

$$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) \neq P(X_1 = 2)P(X_2 = 2)$$

et donc :

les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes

Certaines des probabilités d'intersection peuvent être nulles. Ce sont ces probabilités qu'il faut exploiter pour démontrer que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

4. Posons  $Y = N + 1 - X_2$ . L'univers image de  $Y$  est :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \{N + 1 - k \mid k \in X_2(\Omega)\} = \{N + 1 - k \mid k \in \llbracket 2, N \rrbracket\} \\ &= \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $Y(\Omega) = X_1(\Omega)$ . Soit maintenant  $k \in Y(\Omega)$ . Alors, par définition de  $Y$  :

$$P(Y = k) = P(X_2 = N + 1 - k) = \frac{2(N - k)}{N(N - 1)} = P(X_1 = k)$$

car  $N + 1 - k \in \llbracket 2, N \rrbracket$  et d'après la loi suivie par  $X_1$ . Finalement :

les variables aléatoires  $N + 1 - X_2$  et  $X_1$  suivent la même loi

*Il ne faut pas oublier de commencer par déterminer l'univers image de la variable aléatoire  $N + 1 - X_2$ .*