TD21 – Correction

Exercice 1:

1. Le numérateur se factorise par $x-1$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ donc la limite cherchée vaut -1.
2. Si on n'utilise pas les équivalents, on factorise par le monôme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur ; la limite cherchée est 0.
3. Pour tout $x \geqslant 0$, on a $x^2-16=(x-4)(x+4)=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)$. Après simplification, on trouve que la limite cherchée est $1/32$.
4. En factorisant par e^{2x} (qui est le terme prédominant en $+\infty$), on trouve que la limite cherchée est égale à $+\infty$ (en utilisant au passage la croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$).
5. Pour tout $x>0$, on a
$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\ln(x^2)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
et en composant les limites, on trouve que la limite cherchée est nulle.
6. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\ln(1+e^x)-x=\ln(1+e^x)-\ln(e^x)=\ln(1+e^{-x})$$
et en composant les limites, on trouve que la limite cherchée vaut 1.
7. On a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ donc la limite cherchée est $\lim\limits_{y\to+\infty}ye^{-y}=0$ par croissances comparées.
8. Pour tout $x<0$, on a
$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
car $x<0$! En factorisant par x au dénominateur, on trouve que la limite cherchée est -1.
9. Le terme prédominant au numérateur en $-\infty$ est x, tandis que celui au dénominateur est $-x$. En factorisant par x au numérateur et au dénominateur, on trouve que la limite cherchée est -1.
10. En composant les limites, on trouve que la limite est nulle.

Exercice 2:

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a
$$\sqrt{1+x^2}-1=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$$
On trouve que la limite vaut 2.
2. En procédant de la même manière, on a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}=0$$

Exercice 3:

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{x}-1\leqslant\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant\frac{1}{x}$ et donc, en multipliant par $x^2>0$, il vient $x-x^2\leqslant x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant x$ et le théorème des gendarmes permet de conclure que la limite cherchée est nulle.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $-1\leqslant\cos(e^x)\leqslant1$ donc si $x>0$, on a
$$\frac{-x}{x^2+1}\leqslant\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}\leqslant\frac{x}{x^2+1}$$
et en utilisant le théorème des gendarmes, on trouve que la limite cherchée est nulle.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $x-1 \leqslant x-\sin(x) \leqslant x+1$ et donc, en composant par la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, il vient
$$e^{x-1} \leqslant e^{x-\sin(x)} \leqslant e^{x+1}$$
donc en particulier $e^{x-1} \leqslant e^{x-\sin(x)}$. En utilisant le théorème de comparaison, on trouve alors que la limite cherchée est égale à $+\infty$.

Exercice 4:

1. On a $(e^x-1)\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$ par produit. Donc la limite cherchée est nulle par croissances comparées.
2. En utilisant l'équivalent usuel en 0 du logarithme, on trouve que la limite vaut 1.
3. On a $\sin(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$ donc $\sqrt{\sin(x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}$. De plus, $e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. On trouve que la limite cherchée vaut $+\infty$ en quotientant les équivalents obtenus.
4. On trouve que $\sin(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et par substitution, on a $e^{2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x$. La limite cherchée est 0.
5. On trouve que $\dfrac{(1-\cos x)\ln x}{\tan x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x\ln(x)}{2}$ et par croissances comparées, la limite est nulle.
6. Par substitution, on a
$$\frac{\sqrt{1+\sin(4x)}-1}{x^2} \underset{x\to 0^-}{\sim} \frac{\sin(4x)}{2x^2} \underset{x\to 0^-}{\sim} \frac{2}{x}$$
donc la limite cherchée est $-\infty$.

Exercice 5:

1. Par substitution, on a $\ln(1+e^x) \underset{x\to -\infty}{\sim} e^x$ donc $x^3\ln(1+e^x) \underset{x\to -\infty}{\sim} x^3e^x$ et par croissances comparées, la limite cherchée est nulle.
2. Par substitution, on trouve que $x\left(\sqrt{1+e^{-x}}-1\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{xe^{-x}}{2}$ et par croissances comparées, la limite cherchée est nulle.
3. Par substitution, on trouve que $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} 1$ et donc la limite cherchée vaut 1.
4. On pose $x = 1+h$. Si x est proche de 1, alors h est proche de 0. On a donc
$$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x))^3}{x^3-1} = \lim_{h\to 0} \frac{[\ln(1+h)]^3}{(1+h)^3-1}$$
Or $\dfrac{[\ln(1+h)]^3}{(1+h)^3-1} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h^3}{3h} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h^2}{3}$ donc la limite cherchée est nulle.
5. Même raisonnement : on pose $x = 1+h$. On trouve que $\dfrac{\ln(1+h)}{\sqrt{1+h}-1} \underset{h\to 0}{\sim} 2$ donc la limite cherchée vaut 2.
6. Pour tout $x > 0$, on a en factorisant par $e^{1/x}$:
$$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1-e^{-\frac{1}{x(x+1)}}\right)$$
puis on utilise le théorème de substitution pour trouver un équivalent de la parenthèse :
$$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \underset{x\to +\infty}{\sim} e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x(x+1)} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$
car $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{1/x} = 1 \neq 0$ et car $x(x+1) \underset{x\to +\infty}{\sim} x^2$. On conclut que la limite cherchée vaut 0.

Exercice 6:

On a à chaque fois une forme indéterminée. Quand on a un exposant qui varie (c'est-à-dire qui dépend de x), on écrit l'expression sous forme exponentielle (*rappel* : $a^b = e^{b\ln a}$). Ensuite, on cherche la limite de l'expression dans l'exponentielle en en cherchant au besoin un équivalent. Une fois qu'on a cette limite, on peut composer les limites avec l'exponentielle.
Attention : on ne peut pas composer les équivalents !

1. Pour tout $x > 0$, on a $x^x = e^{x\ln(x)}$. En utilisant les croissances comparées, on trouve que la limite cherchée est $e^0 = 1$.
2. Pour tout $x > 0$, on a $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Par substitution, on trouve que $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc la limite cherchée est e.
3. Pour tout $x > 0$, on a $(1+x^2)^{\frac{1}{2x^3}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{2x^3}}$. Par substitution, on trouve que $\frac{\ln(1+x^2)}{2x^3} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{2x}$ donc la limite cherchée est $+\infty$.
4. Pour x proche de 0, on a $\cos(x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}}$. Or $\ln(\cos x) = \ln(1+(\cos(x)-1))$ et $\lim_{x\to0}(\cos(x)-1) = 0$ donc par substitution
$$\ln(1+(\cos(x)-1)) \underset{x\to0}{\sim} \cos(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$
On trouve que la limite cherchée vaut 1.
5. Pour tout x assez proche de 0, on a (on remarque que $\frac{x}{\sin(x)} \geq 0$ dans ce cas)
$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)} = e^{\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(1+\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)}$$
Or $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right) = 0$ donc par substitution, on a
$$\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(1+\frac{x-\sin x}{\sin x}\right) \underset{x\to0}{\sim} 1$$
On trouve alors que la limite cherchée vaut e.
6. Pour x proche de 0, on a
$$(1+(\tan x)^2)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^{\frac{\ln(1+\tan(x)^2)}{x\sin x}}$$
puis on utilise le théorème de substitution. On trouve que
$$\frac{\ln(1+\tan(x)^2)}{x\sin x} \underset{x\to0}{\sim} 1$$
et donc la limite cherchée vaut e.

Exercice 7:

1. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{x/2}$
2. On a $g(x) = \frac{\ln(x)^5+2x}{2x\ln(x)^5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x}{2x\ln(x)^5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)^5}$
3. $h(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 6x^6$

Exercice 8:

1. Pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, on a
$$\frac{\sin(2x)-x}{\ln(1+x)} = \frac{\sin(2x)}{\ln(1+x)} - \frac{x}{\ln(1+x)}$$
et on cherche la limite de chacune des deux expressions ci-dessus en utilisant les équivalents. On trouve que
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\ln(1+x)} = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$
donc la limite cherchée est 1.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$\frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \frac{e^x-1}{2x} - \frac{e^{-x}-1}{2x}$$
et on cherche la limite de chacune des deux expressions ci-dessus en utilisant les équivalents. On trouve que la limite cherchée est $\frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1$.

3. Pour x proche de 0, on a
$$\frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$
et on cherche la limite de chacune des deux expressions ci-dessus en utilisant les équivalents. On trouve que la limite cherchée est $1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}$.

Exercice 9:

1. On trouve que la limite vaut m.
2. ⋆ Si $m \leqslant 0$, alors la limite est égale à $+\infty$.
   ⋆ Si $m > 0$, on peut par exemple trouver la limite en utilisant l'expression conjuguée :
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-m^2)x^2 + x + 1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + m\right)}$$
   Si $m \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, alors on trouve que la limite vaut $+\infty$ si $m \in]0,1[$ et $-\infty$ si $m \in]1,+\infty[$. Enfin, on trouve que si $m = 1$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.
3. ⋆ Si $m = 0$, alors la limite est nulle.
   ⋆ Si $m > 0$, alors
$$\lim_{x\to m^-} \frac{x^3}{x-m} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to m^+} \frac{x^3}{x-m} = +\infty$$
   ⋆ Si $m < 0$, alors
$$\lim_{x\to m^-} \frac{x^3}{x-m} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to m^+} \frac{x^3}{x-m} = -\infty$$
   Attention à bien prendre en compte que m^3 est du même signe que m.

Exercice 10:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On factorise par $\mathrm{e}^{\sin(x)}$. On obtient
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\tan(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)} &= \mathrm{e}^{\sin(x)}(\mathrm{e}^{\tan(x)-\sin(x)} - 1) \\
&= \mathrm{e}^{\sin(x)}(\mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)} - 1) \\
&= \mathrm{e}^{\sin(x)}(\mathrm{e}^{\sin(x)(\frac{1}{\cos(x)}-1)} - 1) \\
&= \mathrm{e}^{\sin(x)}(\mathrm{e}^{\sin(x)\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}} - 1)
\end{aligned}$$
   Or $1-\cos(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$ et $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$.
   Donc $\sin(x)\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}x^3$
   Comme $\lim\limits_{x\to0} \sin(x)\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)} = 0$, par substitution, on a $\mathrm{e}^{\sin(x)\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \sin(x)\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}$.
   D'où par transitivité et produit,
$$\mathrm{e}^{\sin(x)}(\mathrm{e}^{\sin(x)\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)}} - 1) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{2}x^3.$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$,
   $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1)$
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
   Par substitution et par produit, on trouve $\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1) \sim \frac{1}{2}$
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ On utilise la substitution et la transitivité, on trouve
$$\ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos(x)-1) \sim \cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$$

4. Soit $x \in [1;+\infty[$, Par substitution, on trouve

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x - 1 &= \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)} - 1 \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(\frac{x^2+2}{x^2-1}),\ \text{car} \lim_{x\to+\infty} x\ln(\frac{x^2+2}{x^2-1}) = 0\end{aligned}$$

En effet, $x\ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right) = x\ln(1+\frac{x^2+2}{x^2-1}-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}-1\right) = x\frac{3}{x^2-1}$

On obtient $\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{x}$

5. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\begin{aligned}\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) &= \ln\left(1+\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{x}^2} \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

D'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

On obtient par composition de limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = \mathrm{e}^{-\dfrac{1}{2}}$

D'où $\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\dfrac{1}{2}}$

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln(x) = \ln(1+x-1) \sim x-1$

Donc $\ln(x) \sim (x-1)^2$

D'où $\frac{(\ln(x))^2}{(x-1)\sin(x)}\sqrt{x} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{x-1}{\sin(1)} \underset{x\to1}{\to} 0$

On obtient $\frac{(\ln(x))^2}{(x-1)\sin(x)}\sqrt{x} - 1 \underset{x\to1}{\sim} -1$.

7. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Par substitution, on obtient $\sqrt{\cos(x)} - 1 = \sqrt{1+\cos(x)-1} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$.

Par produit, on trouve $\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin^3(x)}(\sqrt{\cos(x)}-1) \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}$

8. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}x\ln(1+x^2) - 2x\ln(x) &= x\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) \\ &= x\ln\left(1+\frac{1+x^2}{x^2}-1\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} x\frac{1}{x^2} \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Exercice 11:

1. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(0) = 1$$
2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+6x+2}$
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+6x+2}-3}{x-1} = f'(1) = \frac{4}{3}$$
3. Soit $f : x \mapsto \sin(2x)$
$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(2x)}{x-\pi} = f'(\pi) = 0.$$
4. Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^t$
$$\lim_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = f'(0) = 1.$$

Exercice 12:

1. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ est définie sur $\mathbb{R}$ (polynôme).
La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$ est la composée de la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ et d'un polynôme défini sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} x \mapsto \sqrt{x^2-2x} \text{ est définie en } x & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto x^2-2x \text{ est définie en } x \\ x^2-2x \geq 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x(x-2) \geq 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ \text{(tableau de signes d'un trinôme)} \end{array} \right. \end{array}.$$
Ainsi par composition $x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$ est définie sur $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.
Finalement par somme, $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[}$
2. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \sqrt{x(x-2)} - \frac{1}{2}x = +\infty.$
En $+\infty$, nous obtenons une forme indéterminée, il faut donc procéder différemment.
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})} - \frac{1}{2}x \\ & = & \sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}x \\ & = & |x|\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}x \\ & = & x\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}x \text{ car } |x| = x \text{ au voisinage de } +\infty \\ & = & x(\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}) \end{array}$$
Or $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ donc par produit $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$
3. La fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme).
La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$ est la composée de la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'un polynôme défini sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} x \mapsto \sqrt{x^2-2x} \text{ est dérivable en } x & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto x^2-2x \text{ est dérivable en } x \\ x^2-2x > 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x(x-2) > 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[\end{array} \right. \end{array}.$$
Ainsi par composition $x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$ est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

Finalement par somme, $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} - \frac{1}{2} = \frac{2x-2-\sqrt{x^2-2x}}{2\sqrt{x^2-2x}}}$$

4. $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-2-\sqrt{x^2-2x}}{2\sqrt{x^2-2x}} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-2-\sqrt{x^2-2x} \geq 0$$

car le dénominateur est strictement positif.

Ainsi $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-2 \geq \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow x > 1$ (énoncé)

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. Etudions l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

On utilisera à nouveau l'expression de f trouvée précédemment :

$f(x) = |x|\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}x$

avec $|x| = x$ au voisinage de $+\infty$ et $|x| = -x$ au voisinage de $-\infty$.

- ⋆ Au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}x}{x} = \frac{x(\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2})}{x} = \sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Etudions alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x$.

On a $f(x) - \frac{1}{2}x = x\sqrt{1-\frac{2}{x}} - x = x(\sqrt{1-\frac{2}{x}} - 1)$

En utilisant la quantité conjuguée on obtient :

$$f(x) - \frac{1}{2}x = x(\sqrt{1-\frac{2}{x}} - 1) \times \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = x\frac{-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = -1$

$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = \frac{1}{2}x - 1}$

- ⋆ Au voisinage de $-\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}} - \frac{1}{2}x}{x} = \frac{-x(\sqrt{1-\frac{2}{x}} + \frac{1}{2})}{x} = -(\sqrt{1-\frac{2}{x}} + \frac{1}{2})$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -(\sqrt{1-\frac{2}{x}} + \frac{1}{2}) = \frac{-3}{2}$

Etudions alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) + \frac{3}{2}x$.

On a $f(x) + \frac{3}{2}x = -x\sqrt{1-\frac{2}{x}} + x = x(1 - \sqrt{1-\frac{2}{x}})$

En utilisant la quantité conjuguée on obtient :

$$f(x) + \frac{3}{2}x = x(1 - \sqrt{1-\frac{2}{x}}) \times \frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$f(x) + \frac{3}{2}x = x\dfrac{\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \frac{3}{2}x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 1$

La courbe de f admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = \frac{-3}{2}x + 1$