TD22–Correction

Exercice 1:

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car est l'inverse de la fonction exponentielle qui ne s'annule pas et est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_-$ car la fonction nulle est continue sur $\mathbb{R}_-$. Il reste donc à étudier la continuité (à droite) en 0 de f. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue à droite en 0 donc f n'est pas continue en 0. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ où la fonction exponentielle est continue. Par composition, la fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction carrée est continue sur $\mathbb{R}_-$ donc g est continue sur $\mathbb{R}_-$. Il reste donc à étudier la continuité de g (à droite) en 0. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y} = 0 = g(0)$. On en déduit que la fonction g est continue en 0. Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ où la fonction sinus est continue. Par composition, la fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. De plus, la fonction $x \longmapsto x^2-1$ est aussi continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme fonction polynôme donc, par produit, f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Il reste donc à étudier la continuité de h en 1. En encadrant $\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$, on trouve que
$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad -|x^2-1| \leqslant |h(x)| \leqslant |x^2-1|$$
En utilisant le théorème des gendarmes, on trouve alors que $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 0 = h(1)$. Donc h est continue en 1. Finalement, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $x \longmapsto \sin(x)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction $x \longmapsto e^{x^2}-1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par quotient, la fonction ℓ est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. Il reste donc à étudier la continuité de ℓ en 0. On utilise les équivalents usuels pour trouver la limite de $\ell(x)$ quand x tend vers 0. En utilisant le théorème de substitution (pour le dénominateur), on trouve que $\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$. On en conclut donc que $\lim\limits_{x\to 0} \ell(x) = 1 \neq \ell(0)$ car $\ell(0) = 2$. Donc la fonction ℓ n'est pas continue en 0. Finalement, la fonction ℓ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2:

- ⋆ Tout d'abord, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. En effet, la fonction $x \longmapsto 1-x^2$ est continue sur $]-1,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ où la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue (elle l'est sur $\mathbb{R}_+$). Par composition, la fonction f est donc continue sur $]-1,1[$. D'autre part, la fonction $x \longmapsto ax^2+bx+c$ est continue sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ comme fonction polynôme. On en déduit donc que la fonction f est continue sur $]-1,1[\cup]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Il reste maintenant à étudier la continuité de f en -1 et en 1.
- ⋆ **Étude de la continuité en 1 :** On a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{1-1^2} = 0$ tandis que $f(1) = a+b+c$. Donc f est continue en 1 si et seulement si $a+b+c=0$.
- ⋆ **Étude de la continuité en -1 :** De la même manière, f est continue en -1 si et seulement si $a-b+c=0$.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
f \text{ est continue sur } \mathbb{R} &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 & \mathrm{L}_1 \\ a - b + c = 0 & \mathrm{L}_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b + c = 0 & \mathrm{L}_1 \\ 2b = 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \end{cases} \\
&\iff (a,b,c) = (a,0,-a)
\end{aligned}$$

Exercice 3:

1. On sait que la fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est définie en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x - \lfloor x \rfloor \geqslant 0$ (car la fonction $\sqrt{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$) c'est-à-dire tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$. Or tout nombre réel x vérifie cette inégalité. On en déduit que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par somme, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On sait que $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ donc
$$\lim_{x \to n^-} \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} = \sqrt{n - (n-1)} = \sqrt{1} = 1$$
et donc $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n = f(n)$. Finalement, f est continue à gauche en n. D'autre part, $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$ donc
$$\lim_{x \to n^+} \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} = \sqrt{n - n} = 0$$
et donc $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n = f(n)$. Finalement, f est continue à droite en n. Comme la fonction f est continue à droite et à gauche en n, elle est continue en n.
3. On sait que la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est aussi continue sur cet ensemble comme composée de fonction continue et par somme, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Or d'après la question 2., la fonction f est continue en tout entier relatif. On conclut donc que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4:

1. La fonction a est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Les fonctions $x \longmapsto x - 1$ et $x \longmapsto x^2 - 1$ sont continues sur cet ensemble et ne s'annule pas donc leurs inverses sont des fonctions continues sur cet ensemble. On en déduit alors que a est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On étudie ensuite le prolongement par continuité de a en 1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a
$$a(x) = \frac{-(x^2 + 2x - 3)}{-(x-1)^2(1+x)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}$$
On a donc $\lim\limits_{x \to 1^\pm} a(x) = \pm\infty$. On ne peut donc pas prolonger par continuité la fonction a en 1.
2. La fonction b est définie en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + 1 > 0$. Donc $\mathcal{D}_b =]-1, +\infty[$. On justifie ensuite proprement que b est continue sur ce domaine. On étudie maintenant le prolongement par continuité de b à droite en -1. Pour tout $x > -1$, on a
$$b(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}(x-3)$$
donc $\lim\limits_{x \to -1^+} b(x) = 0$. On en déduit qu'on peut prolonger par continuité la fonction b en -1 en posant $b(-1) = 0$.
3. La fonction c est définie en tout nombre réel t tel que $1 + t > 0$ et $\sqrt{1+t} - 1 \neq 0$. On trouve que $\mathcal{D}_c =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. On justifie ensuite que la fonction c est continue sur $\mathcal{D}_c$. On étudie ensuite le prolongement par continuité de c en 0. En utilisant les équivalents usuels (en zéro), on trouve que $\lim\limits_{t \to 0} c(t) = 2$. On peut donc prolonger la fonction c par continuité en 0 en posant $c(0) = 2$.
4. La fonction d est définie en tout nombre réel x tel que $x \geqslant 0$ (pour la racine carrée) et $\sqrt{x} - 1 > 0$ et $x - 1 > 0$ (pour les logarithmes). On trouve que $\mathcal{D}_d =]1, +\infty[$. On justifie ensuite que la fonction d est continue sur $\mathcal{D}_d$. On étudie maintenant le prolongement par continuité (à droite) en 1 de d. Pour tout $x > 1$, on a
$$d(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1}\right) = -\ln\left(\sqrt{x} + 1\right)$$
Donc $\lim\limits_{x \to 1^+} d(x) = -\ln 2$. On peut donc prolonger d par continuité en 1 en posant $d(1) = -\ln 2$.
5. On justifie que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On montre que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad -x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$$
En utilisant le théorème des gendarmes, on trouve que f a pour limite 0 en 0. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

6. La fonction g est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. On montre ensuite qu'elle y est continue. Pour tout $t \neq \frac{1}{2}$, on a
$$g(t) = \frac{(2t-1)(3t+4)}{2t-1} = 3t+4$$
Donc $\lim_{t \to 1/2} g(t) = \frac{11}{2}$. On peut donc prolonger la fonction g par continuité en $\frac{1}{2}$ en posant $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{2}$.
7. On trouve que la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. En utilisant les équivalents (avec le théorème de substitution pour le numérateur), on trouve que $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$. Donc h admet une limite nulle en 0. On peut donc prolonger la fonction h par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.

Exercice 5:

1. La fonction inverse est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ où la fonction arctan est définie et continue. Par composition, la fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
2.
   - ⋆ **Prolongement par continuité à droite en 0.** On cherche la limite de h à droite en 0. On a $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par composition des limites,
$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{y\to +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$
On peut donc prolonger h par continuité à droite en 0 en posant $h(0) = \frac{\pi}{2}$.
   - ⋆ **Prolongement par continuité à gauche en 0.** On cherche la limite de h à gauche en 0. On a $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc par composition des limites,
$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{y\to -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$$
On peut donc prolonger h par continuité à droite en 0 en posant $h(0) = -\frac{\pi}{2}$.
3. Si on pouvait prolonger h par continuité en 0, alors on aurait nécessairement
$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x)$$
ce qui est absurde d'après la question 2. On en conclut que h n'est pas prolongeable par continuité en 0.

Exercice 6: On commence par étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$. On trouve qu'elle est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $[-1, 1]$ puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (faire un tableau de variation). On applique ensuite le théorème de la bijection sur chacun de ces intervalles.

Exercice 7: Le cycliste parcourt ses 20 km entre les temps $t = 0$ et $t = 60$ (le temps est exprimé en minutes). Pour tout $t \in [0, 60]$, notons $d(t)$ la distance parcourue par le cycliste au temps t. On sait par hypothèse que $d(0) = 0$ et $d(60) = 20$. Montrer qu'il existe une intervalle de temps de 30 minutes pendant lequel il parcourt exactement 10 km revient à montrer qu'il existe $t \in [0, 30]$ tel que $d(t + 30) - d(t) = 10$, l'intervalle de temps cherché étant alors $[t, t + 30]$. Considérons donc la fonction
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,30] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & d(t+30) - d(t) - 10 \end{array} \right.$$
On cherche donc à montrer qu'il existe $t \in [0, 30]$ tel que $f(t) = 0$. On a $f(0) = d(30) - d(0) - 10 = d(30) - 10$ tandis que $f(30) = d(60) - d(30) - 10 = 10 - d(30) = -f(0)$. Donc les nombres $f(0)$ et $f(30)$ sont de signes contraires. On applique ensuite le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f continue (la distance parcourue est une fonction continue du temps) sur l'intervalle $[0, 30]$.

Exercice 8: Comme la fonction f est à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, on a $g(0) = -f(0) \leqslant 0$ (car $f(0) \geqslant 0$) et $g(1) = 1 - f(1) \geqslant 0$ car $(f(1) \leqslant 1)$. On utilise ensuite le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue g sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 9: Comme la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, il existe des nombres réels m et M tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$ (autrement dit, $f(\mathbb{R}) \subset [m, M]$).

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) \in \mathbb{R}$, donc $m \leqslant f(g(x)) \leqslant M$ ce qui se réécrit $m \leqslant (f \circ g)(x) \leqslant M$. Donc la fonction $f \circ g$ est bornée.
- ★ On a $(g \circ f)(\mathbb{R}) = g(f(\mathbb{R})) \subset g([m, M])$. Or la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle l'est en particulier sur le segment $[m, M]$. Mais on sait que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment donc il existe des nombres réels m' et M' tels que $(g \circ f)(\mathbb{R}) \subset [m', M']$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $m' \leqslant (g \circ f)(x) \leqslant M'$. Donc la fonction $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10: La fonction $h = g - f$ est continue sur le segment $[a, b]$ comme différence de fonctions qui le sont. Donc h est bornée et elle atteint son maximum et son minimum. Dire que h atteint son minimum signifie qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $h(x_0)$ soit le minimum de h sur $[a, b]$, ce qui se réécrit

$$\forall x \in [a, b], \qquad h(x) \geqslant h(x_0) \tag{E}$$

Or d'après l'énoncé, on sait que pour tout $x \in [a, b]$, on a $h(x) > 0$ donc en particulier $h(x_0) > 0$. La condition (E) se réécrit

$$\forall x \in [a, b], \qquad g(x) - f(x) \geqslant h(x_0)$$

soit encore

$$\forall x \in [a, b], \qquad g(x) \geqslant h(x_0) + f(x)$$

Le nombre $\lambda = h(x_0) > 0$ convient donc.

Exercice 11:

1. La fonction f est strictement décroissante et continue sur $]a, b[$. D'après le théorème de la bijection, f réalise donc une bijection de $]a, b[$ sur $\mathbb{R}$ (en calculant les limites en a et b de f).
2. Comme f est continue et strictement décroissante sur $]a, b[$, le théorème de la bijection assure la continuité de f^{-1} sur $\mathbb{R}$. De plus, f^{-1} est aussi strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in]-1, 1[$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = y &\iff \frac{2x}{x^2-1} = y \\ &\iff yx^2 - 2x - y = 0 \end{aligned}$$

Si $y = 0$, alors l'antécédent de 0 est $x = 0$. On suppose maintenant que $y \neq 0$. On a obtenu une équation du second degré (en x). Son discriminant vaut $4(1 + y^2)$. Donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes qui sont

$$\frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} \qquad \text{et} \qquad \frac{1 - \sqrt{1+y^2}}{y}$$

Or $\sqrt{1+y^2} > |y|$ donc la première racine n'appartient pas à l'intervalle $]-1, 1[$. Or le produit des deux racines vaut -1 donc l'autre racine appartient à $]-1, 1[$ (distinguer les cas $y > 0$ et $y < 0$). On en conclut que l'antécédent de y par f dans l'intervalle $]-1, 1[$ est $\dfrac{1-\sqrt{1+y^2}}{y}$. Finalement,

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, 1[\\ y & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1-\sqrt{1+y^2}}{y} & \text{si } y \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exercice 12:

1. On applique le théorème de la bijection à la fonction f_n qui est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $]1, 2[$ (pour $n \geqslant 3$, on a $f(2) = 2 - n\ln(2) < 0$).
2. Soit $n \geqslant 3$. Pour tout $x \in]1, 2[$, on a $f_n(x) - f_{n+1}(x) = \ln(x) > 0$. On en déduit alors que $f_n(a_n) < f_n(a_{n+1})$. Or la fonction f_n est strictement décroissante sur $]1, 2[$ donc on a $a_n > a_{n+1}$. On en déduit que la suite $(a_n)_{n \geqslant 3}$ est strictement décroissante.
3. La suite $(a_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente (de limite notée ℓ) d'après le théorème de la limite monotone. On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell \neq 1$. Alors $\ell \in]1, 2[$. Pour tout $n \geqslant 3$, on a $f_n(a_n) = 0$, c'est-à-dire $a_n - n\ln(a_n) = 0$ et donc $n\ln(a_n) = a_n$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(a_n) = \ln(\ell)$ et comme $\ell > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n\ln(a_n) = +\infty$. On obtient donc une absurdité en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $n\ln(a_n) = a_n$ ($n \geqslant 3$).

Exercice 13:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$. On trouve qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. La continuité de f_n, sa stricte monotonie et le fait que $0 \in f_n(\mathbb{R})$ entraîne (via le théorème de la bijection) l'existence d'une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$ que l'on note u_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f_n(0) = -n < 0$ tandis que $f_n(n^{1/3}) = 3n^{1/3} > 0$. Par conséquent, $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(n^{1/3})$. Or la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $0 < u_n < n^{1/3}$. En particulier, $0 \leqslant u_n \leqslant n^{1/3}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 \leqslant 0$ donc $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. On en déduit que $f_{n+1}(u_{n+1}) \leqslant f_n(u_{n+1})$. Et comme $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = f_n(u_n)$ par définition de u_{n+1} et u_n, il vient $f_n(u_n) \leqslant f_n(u_{n+1})$. Mais la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc nécessairement $u_n \leqslant u_{n+1}$. Finalement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 0$ donc $u_n^3 + 3u_n - n = 0$. En isolant u_n^3, il vient $u_n^3 = n - 3u_n$. On divise ensuite par $n \neq 0$ ce qui nous donne
$$\frac{u_n^3}{n} = 1 - \frac{3u_n}{n} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left(\frac{u_n}{n^{1/3}}\right)^3 = 1 - \frac{3u_n}{n} \qquad \text{car } \left(n^{1/3}\right)^3 = n$$
5. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^{1/3}} = 1$, ce qui revient à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{n^{1/3}}\right)^3 = 1$ soit encore, d'après la question 4., que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3u_n}{n}\right) = 1$ ce qui est enfin encore équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant n^{1/3}$, ce qui donne l'encadrement suivant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{1}{n^{2/3}}$$
Le théorème des gendarmes permet alors de conclure.

Exercice 14:

1. On fixe un nombre réel x. On montre par récurrence (simple) que pour tout entier naturel n, la propriété
$$\mathcal{P}_n : \text{« } f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \text{ »} \qquad \text{est vraie}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$. Comme la fonction f est continue en 0 par hypothèse, on a
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{y\to0} f(y) = f(0)$$
On a donc montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $f(x) = f(0)$. Il s'ensuit donc que f est une fonction constante.

Exercice 15:

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$
Donc f est solution de l'équation fontionnelle $(\star)$.
2. (a) On applique la relation $(\star)$ en $x = 0$ et $y = 0$, ce qui donne $f(0+0) = f(0)+f(0)$. Mais $0+0 = 0$ donc $f(0+0) = f(0)$. Donc l'égalité précédente se réécrit $f(0) = f(0)+f(0)$. On a donc $f(0) = 0$.
   (b) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 (pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$). De plus, en appliquant la relation $(\star)$ en x et en $y = -x$, il vient $f(x+(-x)) = f(x)+f(-x)$, soit $f(0) = f(x)+f(-x)$ et comme $f(0) = 0$ d'après la question précédente, il vient $0 = f(x)+f(-x)$ soit encore $f(-x) = -f(x)$. On en conclut donc que la fonction f est impaire.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- ⋆ On établit à l'aide d'une récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = nf(x)$ (on utilise dans l'hérédité la relation $(\star)$).
- ⋆ Pour passer de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, on utilise l'imparité de f. Si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f((-n)x) = f(-(nx)) = -f(nx) = -(nx) = (-n)x$$

ce qui étend la propriété précédente aux entiers négatifs.

(d) Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. En utilisant le point précédent à $n = q \in \mathbb{N}$ et à $x = p/q \in \mathbb{R}$, on a

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q \times \frac{p}{q}\right) = f(p \times 1) = pf(1) = pa$$

où l'avant-dernière égalité provient encore de la question 2. (c) appliquée en $n = p \in \mathbb{Z}$ et en $x = 1$.

(e) *Remarque.* On admet ici le fait tout nombre réel x est la limite d'une suite de rationnels. Si $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général (par exemple)

$$r_n = 2 \times \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \in \mathbb{Q}$$

est convergente de limite x, ce qui démontre le fait admis. Pour une démonstration du fait que cette suite tend vers x, voir l'exercice 11 3) du TD16 sur les suites réelles.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite de nombres rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est convergente de limite x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $r_n \in \mathbb{Q}$, on sait d'après la question 2. (e) que $f(r_n) = r_n a$. Or f est continue en x et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f(x)$. On a donc

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n) = \lim_{n \to +\infty} (r_n a) = \left(\lim_{n \to +\infty} r_n\right) a = xa$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. D'après les questions 1. et 2., l'ensemble des solutions de l'équation fonctionnelle $(\star)$ est

$$\left\{ f : x \longmapsto ax \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de $(\star)$ est l'ensemble des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16:

1. Pour montrer que f est continue sur I.
Méthode 1 : On va revenir à la définition de continuité.
Soit $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } x_0 &\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\iff \Big(\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon\Big) \end{aligned}$$

Comme $\forall x \in I, |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$, il suffit de prendre $\eta = \frac{\epsilon}{k}$.
Donc $\forall x_0 \in I, \quad f$ est continue en x_0
Donc f est continue sur I.
Méthode 2 : Soit $x_0 \in I$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{I}$, $-k(x_0 - x) \leq f(x_0) - f(x) \leq k(x_0 - x)$. Or $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$ donc par théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$. Donc f est continue sur I

2. On suppose que $0 < k < 1$ et que f a un point fixe noté l.

(a) On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe l et $p \in I$ distincts tel que $f(l) = l$ et $f(p) = p$. En utilisant la propriété de f, on obtient

$$|p - l| = |f(p) - f(l)| \leq k|p - l|.$$

d'où
$$1 = \frac{|p-l|}{|p-l|} \leq k.$$
Contradiction.
On a montré par l'absurde que le point fixe est unique.

(b) On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
On va raisonner par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{R}(n)$ la propriété :"$|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$".
Initialisation : $\mathcal{R}(0)$ est vraie
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{R}(n)$ est vraie. On montre que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.
$$\begin{aligned}|x_{n+1} - l| &= |f(x_n) - f(l)| \\ &\leq k|x_n - l| \text{ propriété de } f \\ &\leq k \times k^n|x_0 - l| \text{ hypothèse de récurrence} \\ &\leq k^{n+1|}|x_0 - l|\end{aligned}$$

En utlisant le théorème des gendarmes, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Culture : Les applications qui vérifient l'inégalité au début de l'exercice sont appelées applications lipschitziennes. Lorsque la constante k est plus petite strictement que 1, l'application est dite contractante. Dans l'exercice on a supposé qu'il existait un point fixe. L'existence de ce point fixe dans le cas des applications contractantes est en fait assurée par un théorème (théorème du point fixe de Picard ou de Banach).

Exercice 17: Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et est finie. On la note l.
   Par définition, on a $\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, x \geq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$
   Prenons par exemple $\epsilon = 1$. Donc $\exists\eta > 0, \forall x \in [\ \eta\ ;\ +\infty[, |f(x) - l| \leq l$ et donc $l - 1 < f(x) < 1 + l$.
   Il reste à traiter le cas des $x \in [0;\eta]$. Or l'image d'un segment est un segment donc f est borné sur $[0;\eta]$.
   Conclusion : la fonction f est borné sur $[0, +\infty[$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Par définition de la limite, $\forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I, x \geq \eta \implies f(x) \geq A$
   Prenons $A = 1$ donc $\exists\eta > 0$ tel que $\forall x \in [\eta; +\infty[f(x) > 1$.
   Donc f est minorée sur $[\eta; +\infty[$
   Comme l'image d'un segment est un segment donc f est minoré sur $[0;\eta]$.
   Conclusion : la fonction f est minoré sur $[0, +\infty[$.
3. On suppose que $f(0) < 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est strictement positive. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$.
   A l'aide de la définition de limite (en choisissant correctement ϵ), on peut montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x) > 0$. On peut ensuite appliqué le Théorème des valeurs intermédiaire.

Exercice 18:

1. (a) Pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x} + \ln(x) = \dfrac{1}{x}(1 + x\ln(x))$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées donc, comme $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, on a par produit $\boxed{\ell_1 = +\infty}$.

   (b) On sait que $\mathrm{e}^X - 1 \underset{X\to0}{\sim} X$ donc, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, on a
   $$\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$
   car $x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
   Comme de plus $x^2 + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$, on a par produit et quotient $\dfrac{x^2+1}{x}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$. Par conséquent, $\boxed{\ell_2 = 1}$.

(c) Pour tout $x > 0$, on a puisque $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$,

$$\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^{-\ln(x)\ln\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$. Par produit, il vient

$$-\ln(x)\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -1$$

On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x)\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) = -1$ et donc, par composition des limites $\boxed{\ell_3 = \lim\limits_{X\to-1} \mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-1}}$.

2. ⋆ La fonction $x \longmapsto \sin(\lambda x)$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, de même que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - 1$. De plus, cette dernière fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-^*$ donc la fonction f est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. Par ailleurs, la fonction $x \longmapsto 1+x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]1, +\infty[$ où la fonction $\sqrt{\cdot}$ est continue donc, par composition, la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que, par quotient, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   ⋆ On étudie maintenant la continuité de f en 0. Pour cela, on calcule les limites à gauche et à droite en 0. Comme $\lim\limits_{x\to0} \lambda x = 0$, on a $\sin(\lambda x) \underset{x\to0}{\sim} \lambda x$. De plus, $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to0}{\sim} x$ donc, par quotient, $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \lambda$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lambda}$. De plus, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc, par quotient, $f(x) \underset{x\to0^-}{\sim} -\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\frac{1}{2} = f(0)}$. Or, on sait que

$$f \text{ est continue en } 0 \iff \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = -\frac{1}{2}$$

   On en conclut donc que f est continue en 0 si et seulement si $\lambda = -\frac{1}{2}$. Finalement, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \lambda = -\frac{1}{2}}$.

3. (a) La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ où la fonction sinus est continue. Par composition, la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, la fonction $x \longmapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$. On multiplie ensuite par x :

   ⋆ si $x > 0$, alors

$$\underbrace{-x}_{=-|x|} \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \underbrace{x}_{=|x|}$$

   ⋆ si $x < 0$, alors les inégalités sont renversées lorqu'on multiplie par x, c'est-à-dire

$$\underbrace{x}_{=-|x|} \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \underbrace{-x}_{=|x|}$$

   Dans les deux cas, on a donc $-|x| \leqslant x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$. Il suffit ensuite d'ajouter 1 à chaque membre de l'inégalité pour obtenir :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad 1 - |x| \leqslant g(x) \leqslant 1 + |x|}$$

(c) On a $\lim_{x\to 0}(1\pm|x|)=1$. D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x)=1}$. Donc

$$\boxed{\text{on peut prolonger } g \text{ par continuité sur } \mathbb{R} \text{ en posant } g(0)=1}$$