TD23 – Correction

Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice 1:

1. $f_1(0) \neq 0$ donc f_1 n'est pas linéaire.
2. $f_2(0, \frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ et $f_2(0, \frac{\pi}{2}) = (1, 0)$ mais $f_2(0, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) \neq f_2(0, \frac{\pi}{3}) + f_2(0, \frac{\pi}{2})$ donc f_2 n'est pas linéaire.
3. Soit $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $f_3(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha x + x', 0) = \alpha f_3(\vec{u}) + f_3(\vec{v})$ donc f_3 est linéaire.
4. $f_4(0, 1) + f_4(1, 0) \neq f_4((0, 1) + (1, 0))$ donc f_4 n'est pas linéaire.
5. f_5 est linéaire (se démontre comme pour f_3)
6. f_6 est linéaire (se démontre comme pour f_3)
7. $f_7(0, 1) = (2, 0, 1)$ et $f_7(0, -1) = (-2, 0, 1)$ mais $f_7(0, 1) + f_7(0, -1) \neq f_7((0, 1) + (0, -1))$ donc f_7 n'est pas linéaire.

Exercice 2:

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
   $$\begin{array}{rcl} (x,y,z) \in Ker(f_1) & \Leftrightarrow & f(x,y,z) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & (3x - y + z, -x + 5y - z, 2x + 4y) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - y + z & = & 0 \\ -x + 5y - z & = & 0 \\ 2x + 4y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \text{on échelonne et on résout le système} \\ & \Leftrightarrow & (x,y,z) \in vect((-2,1,7)) \end{array}$$
   Ainsi $Ker(f_1) = vect((-2, 1, 7))$ donc une base du noyau est le vecteur non nul $(-2, 1, 7)$ et f_1 non injective car $Ker(f_1) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
2. $Ker(f_2) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc f_2 est injective. Et comme f_2 est une application linéaire de deux espaces vectoriels de même dimension (ici 2), f_2 est bijective.
3. $Ker(f_3) = vect((1, 13, 3))$ donc une base du noyau est le vecteur non nul $(1, 13, 3)$ et f_3 non injective car $Ker(f_3) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
4. $Ker(f_4) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ donc f_4 est injective. Et comme f_4 est une application linéaire de deux espaces vectoriels de même dimension (ici 3), f_4 est bijective.

Exercice 3:

1. Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors :
   $Im(f_1) = vect(f_1(\vec{e_1}), f_1(\vec{e_2}), f_1(\vec{e_3}))$
   $Im(f_1) = vect((1, -1, 1), (-1, 2, -1), (0, -1, 0))$
   $Im(f_1) = vect((1, -1, 1), (-1, 2, -1))$ car $(0, -1, 0) = -(1, -1, 1) - (-1, 2, -1)$
   Ainsi $(1, -1, 1)$ et $(-1, 2, -1)$ sont générateurs de $Im(f_1)$ et libres car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de $Im(f_1)$.
   Donc $dim(Im(f_1)) = 2$. On en déduit $Im(f_1) \neq \mathbb{R}^3$ donc f_1 n'est pas surjective.
2. Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ alors :
   $Im(f_2) = vect(f_2(\vec{e_1}), f_2(\vec{e_2}))$
   $Im(f_2) = vect((1, 1), (2, 1))$
   $(1, 1)$ et $(2, 1)$ sont générateurs de $Im(f_2)$ et libres car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de $Im(f_2)$.
   Ainsi $dim(Im(f_2)) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$ et $Im(f_2) \subset \mathbb{R}^2$ donc $Im(f_2) = \mathbb{R}^2$, ce qui signifie que f_2 est surjective. Et comme f_2 est une application linéaire de deux espaces vectoriels de même dimension (ici 2), f_2 est bijective.

3. Soit $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors :
$Im(f_3)=vect(f_3(\vec{e_1}),f_3(\vec{e_2}),f_3(\vec{e_3}))$
$Im(f_3)=vect((1,1,0),(-1,0,3))$
Ainsi $(1,1,0)$ et $(-1,0,3)$ sont générateurs de $Im(f_3)$ et libres car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base de $Im(f_3)$.
Donc $dim(Im(f_3))=2$. On en déduit $Im(f_3)\neq\mathbb{R}^3$ donc f_3 n'est pas surjective.
4. Soit $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors :
$Im(f_4)=vect(f_4(\vec{e_1}),f_4(\vec{e_2}),f_4(\vec{e_3}))$
$Im(f_4)=vect((1,0,0),(-1,3,0),(0,1,-1))$
On montre que cette famille de vecteurs est libre ($\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a(1,0,0)+b(-1,3,0)+c(0,1,-1)=0\Rightarrow a=b=c=0$)
Ainsi ces 3 vecteurs sont générateurs de $Im(f_4)$ et libres. Ils forment donc une base de $Im(f_4)$.
Donc $dim(Im(f_4))=3$et $Im(f_4)\subset\mathbb{R}^3$. On en déduit $Im(f_4)=\mathbb{R}^3$ donc f_4 est surjective. Et comme f_4 est une application linéaire de deux espaces vectoriels de même dimension (ici 3), f_4 est bijective.

Exercice 4:

1. $f(x,y,z)=(x+y+z,x-z,y+3z)$.
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, résolvons le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a\\ x & & & - & z & = & b\\ & & y & + & 3z & = & c\end{array}\right.$
On trouve une unique solution $\left\{\begin{array}{l} x=-a+2b+c\\ y=3a-3b-2c\\ z=-a+b+c\end{array}\right.$
donc f est bijective et $f^{-1}(a,b,c)=(-a+2b+c,3a-3b-2c,a+b+c)$
2. En procédant comme précédemment, on trouve que g est bijective avec $g^{-1}(a,b)=(\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b,\frac{-3}{4}a+\frac{1}{4}b)$.
3. En procédant comme précédemment, on trouve que h est bijective avec $h^{-1}(a,b,c)=(a-b,b-\frac{c}{2},\frac{c}{2})$.

Exercice 5:

Dans chacun des cas, on détermine la matrice associée dans les bases canoniques et on calcule son rang à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

1. $Rg(f)=Rg\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}=2=dim(\mathbb{R}^2)$ donc f est bijective.
2. $Rg(g)=Rg\begin{pmatrix}2&1&3&10\\2&-1&1&2\\5&-1&4&10\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}1&2&3&10\\-1&2&1&2\\-1&5&4&10\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}1&2&3&10\\0&4&4&12\\0&7&7&20\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}1&2&3&10\\0&4&4&12\\0&0&0&-4\end{pmatrix}=3=dim(\mathbb{R}^3)$
Donc g est surjective mais pas injective (il était évident que g ne pouvait être injective puisque la dimension de l'espace vectoriel de départ 4 est strictement supérieure à celle de l'espace d'arrivée 3).
3. $Rg(h)=Rg\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&2\\3&-1&2\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&2\\-1&2&3\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}=2\neq dim(\mathbb{R}^3)$
Donc h n'est pas surjective et donc pas bijective. L'application h va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ deux espaces vectoriels de même dimension 3. Si elle était injective elle serait alors surjective. Elle n'est donc pas non plus injective. Le théorème du rang donne que son noyau est de dimension 1. On peut remarquer que le vecteur $(1,1,-1)$ appartient au noyau de h : on a donc $Ker(h)=vect((1,1,-1))$.

Exercice 6:

1. Soit $\vec{u}=(x,y,z)$ et $\vec{v}=(x',y',z')$ et $\alpha\in\mathbb{R}$
On montre que $f(\alpha\vec{u}+\vec{v})=\alpha f(\vec{u})+f(\vec{v})$. Ainsi f est linéaire.
$\mathcal{M}_f=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

2. **En commençant par $Ker(f)$:**
   Pour le noyau, on résout :
   $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$
   On obtient $Ker(f) = vect((-3,2,1))$ donc f n'est pas injective (c'était évident vu les dimensions).
   Le théorème du rang donne $dim(Ker(f))+rg(f) = 3$ donc $rg(f) = dim(Im(f)) = 2$. Donc $Im(f) = \mathbb{R}^2$ et f est surjective.
   En commençant par $Im(f)$: plus long
   On a $Im(f) = vect((1,1),(1,2),(1,-1)) = vect((1,1),(1,-1))$ car $(1,2) = \frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$.
   ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils sont libres et générateurs de $Im(f)$. C'est donc une base de $Im(f)$ qui est donc de dimension 2 (donc f est surjective)
   Le théorème du rang donne que $dim(Ker(f)) = 1$. Il suffit de trouver un vecteur non nul du noyau pour en déterminer une base.
   Pour le noyau, on résout :
   $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$
   On obtient $Ker(f) = vect((-3,2,1))$ donc f n'est pas injective.

Exercice 7:

1. Soit $\vec{u} = (x,y,z)$ et $\vec{v} = (x',y',z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
   Montrons que $f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.
   $f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = f(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z')$
   $= (\lambda y+y' - (\lambda z+z'), -3(\lambda x+x') + 4(\lambda y+y') - 3(\lambda z+z'), \lambda y+y' - (\lambda x+x'))$
   $= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{u'})$
   Donc f est linéaire et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
   On vérifie alors que $M^2 - 3M + 2I_3 = O_3$.
   D'où $M(\frac{-1}{2}M + \frac{3}{2}I_3) = I_3$.
   Ainsi M est inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{-1}{2}M + \frac{3}{2}I_3$.
   On en déduit donc que f est bijective.
4. $dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et $\mathcal{B}$ contient 3 vecteurs. Ce sera une base si la famille est libre.
   or $Rg(e_1,e_2,e_3) = Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$.
   Ainsi la famille est libre . Il s'agit donc bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.
   La matrice de f dans cette base est :
   $$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   (il suffit de calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$, de décomposer ces trois vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ (c'est à dire en trouver les coordonnées dans cette base) et de ranger ces coordonnées en colonne dans l'ordre.
   On remarque que cette matrice est diagonale.

Exercice 8:

1. $dim(E) = 4$ car la matrice a 4 colonnes et $dim(F) = 3$ car la matrice a 3 lignes.

2. Soit $(x,y,z,t) \in E$

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in Ker(f) &\Leftrightarrow f(x,y,z,t) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & + & 2t & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & - & 2y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (\tfrac{-1}{2}z - \tfrac{1}{2}t, \tfrac{-1}{2}z + \tfrac{1}{2}t, z, t) \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) \in vect((\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, 1, 0)(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 1)) \\
&\Leftrightarrow (x,y,z) \in vect((-1,-1,2,0)(-1,1,0,2))
\end{aligned}$$

Ainsi $Ker(f) = vect((-1,-1,2,0)(-1,1,0,2))$

Les deux vecteurs étant générateurs de $Ker(f)$ et libres car non colinéaires, ils forment une base de $Ker(f)$.

3. **Méthode 1 : avec le théorème du rang**

Le théorème du rang donne que $dim(Ker(f)) + rg(f) = 4$ donc $rg(f) = dim(Im(f)) = 2$ donc il suffit de trouver deux vecteurs de $Im(f)$ pour obtenir une base de $Im(f)$. Or $Im(f) = vect((1,2,3),(1,0,-1),(1,1,1),$

On peut donc prendre comme base de $Im(f)$: $((1,0,-1),(0,1,2)$

Méthode 2 : sans le théorème du rang (en étant astucieux)

On peut remarquer que $C_4 + C_2 = C_3$ et $C_1 = 2C_4 + C_2$. D'autre part C_4 et C_2 sont des colonnes non colinéaires. Donc $Rg(f) = 2$ et $Im(f) = vect((1,0,-1),(0,1,2))$.

Méthode 2 : sans le théorème du rang (plus long)

$Im(f) = vect((1,2,3),(1,0,-1),(1,1,1),(0,1,2))$

$Im(f) = vect((1,2,3),(1,0,-1),(0,1,2))$ car $(1,1,1) = \frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(1,0,-1)$

$Im(f) = vect((1,0,-1),(0,1,2))$ car $(1,2,3) = (1,0,-1) + 2(0,1,2)$

Les deux vecteurs sont générateurs de $Im(f)$ et libres car non colinéaires donc ils constituent une base de $Im(f)$.

4. f n'est pas injective car $Ker(f) \neq \{\vec{0}_E\}$.

f n'est pas surjective car $dim(Im(f)) \neq 3$.

Exercice 9:

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

alors l'écriture matricielle de $f(x,y,z)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$

Ainsi $f(x,y,z) = (x+y, x+y+z)$

2. soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$f(e_1) = (1,1) = 2(1,0) + (-1,1)$

$f(e_2) = (0,1) = (1,0) + (-1,1)$

$f(e_3) = (1,1) = 2(1,0) + (-1,1)$

d'où $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}'_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $f(1,-1,1) = f(e_1 - e_2 + e_3) = (1,1) - (0,1) + (1,1) = (2,1) = 3(1,0) + (-1,1)$

$f(-1,-1,1) = f(-e_1 - e_2 + e_3) = -(1,1) - (0,1) + (1,1) = (0,-1) = -(1,0) - (-1,1)$

$f(0,2,0) = f(2e_2) = 2(0,1) = (0,2) = 2(1,0) + 2(-1,1)$

d'où $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 10:

1. **Méthode 1 : En commençant par le calcul du noyau :**
   On trouve en résolvant un système que $Ker(f) = \{\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}\}$ de dimension 0. Donc f est bijective puisque f est un endomorphisme. Donc $Im(f) = \mathbb{R}^3$ de dimension 3 (une base de l'image est donc n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$).
   Méthode 2 :En commençant par le calcul du rang :
   Le calcul du rang de A nous donne $Rg(A) = 3$.
   on en déduit donc que f est bijective, c'est à dire $Ker(f) = \{\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}\}$ de dimension 0 et $Im(f) = \mathbb{R}^3$ de dimension 3 (une base de l'image est donc n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$).
2. **Méthode 1 : En commençant par le calcul du noyau :**
   On trouve $Ker(f) = vect((1,1,0),(2,0,1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -x+y+2z = 0\}$ de dimension 2. Donc d'après le théorème du rang, le rang de f est égal à 1. Or $f(1,0,0) = (-1,-1)$ vecteur non nul. Donc $Im(f) = vect(-1,-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x-y = 0\}$.
   Méthode 2 :En commençant par le calcul du rang :
   Le calcul du rang de B nous donne $Rg(B) = 1$
   On trouve $Ker(f) = vect((1,1,0),(2,0,1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -x+y+2z = 0\}$ de dimension 2.
   et $Im(f) = vect((1,1)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x-y = 0\}$ de dimension 1.

Exercice 11:

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Si f n'est pas l'application nulle alors il existe $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$. Donc $vect(u) \subset Im(f) \subset \mathbb{R}$. Or $dim(vect(u)) = 1$ et $dim(\mathbb{R}) = 1$ donc $Im(f) = \mathbb{R}$. Donc f est surjective.

Je me perfectionne !

Exercice 12:

$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Il existe donc un unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les égalités proposées.
Il suffit de calculer le rang de f.

$$Rg(f) = Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $Rg(f) = 3$ et donc f est bijective.
Si $\lambda = 0$ alors $Rg(f) = 2$ et donc f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 13:

1. $f((x,y,z)) = f(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z, x+y+z)$
2. $Rg(f) = Rg(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = Rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   En échelonnant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on obtient un rang égal à 3.
3. $dim(\mathbb{R}^3) = Rg(f)$ donc f est injective.
   $dim(\mathbb{R}^4) \neq Rg(f)$ donc f n'est pas surjective (on n'a même pas besoin du rang pour cela puisque f a pour espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 inférieure strictement à la dimension de l'espace d'arrivée 4).

Exercice 14:

1. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On montre que $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M^2$
   Une récurrence immédiate montrerait que $\forall n \geq 2, M^n = M^2$

On peut en déduire que M n'est pas inversible.
En effet, si on supposait qu'elle l'est, on aurait alors
$M^3 = M^2 \Leftrightarrow M^{-1}M^3 = M^{-1}M^2 \Leftrightarrow M^2 = M$ Ce qui est faux !
Ainsi f n'est pas bijective.

4. On obtient $Ker(f) = vect((1,1,1))$.
Méthode 1 : base de $Im(f)$ avec théorème du rang :
Le théorème du rang donne que $rg(f) = 2$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires de $Im(f)$ pour en obtenir une base. Or $(0,1,-1)$ et $(-1,-2,0)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $Im(f)$. Donc $Im(f) = vect((0,1,-1),(-1,-2,0))$.
Méthode 2 : base de $Im(f)$ sans théorème du rang en usant d'intelligence :
On remarque que $C_1 + C_3 = -C_2$ et que C_1 et C_3 sont des colonnes non colinéaires donc $Rg(f) = 2$ et $Im(f) = vect((0,1,-1),(-1,-2,0))$.
Méthode 3 : base de $Im(f)$ sans théorème du rang :
Par ailleurs, déterminons une base de $Im(f)$ grâce à un calcul de rang sur les colonnes.
$Rg(f) = Rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
faisons $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$
alors $Rg(f) = Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$C_3 \leftarrow C_3 + C_2$
alors $Rg(f) = Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$
Ceci reconfirme que f n'est pas bijective mais surtout nous donne une base de l'image :
$Im(f) = vect((1,1,1),(0,1,-1))$

Exercice 15:

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Soit $u \in Ker(f)$ Montrons que $u \in Ker(g \circ f)$.
On a $g \circ f(u) = g(0_F) = O_G$ donc $u \in Ker(g \circ f)$.

Par ailleurs soit $v \in Im(g \circ f)$. Montrons que $v \in Im(g)$
Si $v \in Im(g \circ f)$ alors $\exists x \in E$ tel que :
$g \circ f(x) = v$
soit $g(f(x)) = v$ donc $v \in Im(g)$.

2. Procédons par double inclusion.
Soit $x \in Ker(f) \cap Im(f)$. Alors $f(x) = 0$ et il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = x$.
Donc $f^2(x_1) = 0$ et $x_1 \in Ker(f^2)$. Donc $x \in f(Ker(f^2))$. Donc $Ker(f) \cap Im(f) \subset f(Ker(f^2))$.
Soit $y \in f(Ker(f^2))$. Alors il existe $x \in Ker(f^2)$ tel que $f(x) = y$. On a donc $y \in Im(f)$. et $f^2(x) = 0$. D'autre part $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = 0$ donc $y \in Ker(f)$. Donc $y \in Ker(f) \cap Im(f)$. Donc $f(Ker(f^2)) \subset Ker(f) \cap Im(f)$.
Par double inclusion $Ker(f) \cap Im(f) = f(Ker(f^2))$.

Exercice 16:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$..

1. Même démonstration (ou cas particulier) qu'à l'exercice 15 1) avec $E = F$ et $g = f$.
2. • Si $Ker(f) = Ker(f^2)$. Appliquons le théorème du rang à f et f^2 :
$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = p$ et $dim(Im(f^2)) + dim(Ker(f^2)) = p$. Or $dim(Ker(f)) = dim(Ker(f^2))$ donc $dim(Im(f^2)) = dim(Im(f))$. Or $Im(f^2) \subset Im(f)$ et leurs dimensions sont égales. On a donc $Im(f^2) = Im(f)$.

- en reprenant les calculs mais en partant de $Im(f^2) = Im(f)$ on retrouve de la même façon $Ker(f) = Ker(f^2)$.

  On a donc prouvé l'équivalence entre les deux premières conditions
- Si $Ker(f) = Ker(f^2)$ alors $Im(f^2) = Im(f)$. Soit $x \in Ker(f) \cap Im(f)$. Comme $x \in Im(f)$ il existe x_1 tel que $f(x_1) = x$ et $f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$. D'autre part $Im(f) = Im(f^2)$ donc il existe $x_2 \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(f(x_2)) = x$. Or $f(x) = 0$ donc $f^3(x_2) = 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $f^2(f(x_2)) = 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $f(x_2) \in Ker(f^2)$ donc $f(x_2) \in Ker(f)$ donc $f^2(x_2) = 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^p}$.

  Donc $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$
- Si $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$. On sait que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$. Il faut montrer l'inclusion inverse. Soit $x \in Ker(f^2)$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0$ Donc $y = f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$. Donc $y = 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$ donc $x \in Ker(f)$. Donc $Ker(f^2) \subset Ker(f)$. Donc $Ker(f) = Ker(f^2)$

  On a donc prouvé l'équivalence entre la première et la dernière condition.

Ce qui donne l'équivalence des trois conditions.

3. On suppose que l'une des trois conditions est vérifiée. Par équivalence les trois le sont donc.

   On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}_n$: $Ker(f) = Ker(f^n)$ et $Im(f) = Im(f^n)$ est vraie

   Initialisation Pour $n = 1$ c'est évident.

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   On montre comme dans la question 1) que $Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1})$ et $Im(f^{n+1}) \subset Im(f^n)$.

   Soit $x \in Ker(f^{n+1})$. Alors $f^{n+1}(x) = 0$ et donc $f(f^n(x)) = 0$. Or $f^n(x) \in Im(f^n) = Im(f)$ (l'égalité étant due à l'hypothèse de récurrence). Il existe donc $y \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(y) = f^n(x)$. On alors $f^2(y) = 0$ donc $y \in Ker(f^2) = Ker(f)$ donc $f(y) = 0$ donc $f^n(x) = 0$. Donc $x \in Ker(f^n)$.

   Par double inclusion $Ker(f^n) = Ker(f^{n+1})$ et donc $Ker(f) = Ker(f^{n+1})$.

   En appliquant le théorème à f^n et f^{n+1} on a directement $dim(Im(f^n)) = dim(Im(f^{n+1})$ et comme ces sous-espaces vectoriels sont inclus l'un dans l'autre ils sont égaux : $Im(f) = Im(f^n) = Im(f^{n+1})$.

   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   Conclusion : Par récurrence, pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$Ker(f) = Ker(f^n)$ et $Im(f) = Im(f^n)$

Exercice 17:

1. f est déjà un endomorphisme. Pour que ce soit un automorphisme il doit de plus être bijectif.

   Or f bijective $\Leftrightarrow Rg(A) = 4$

   Le calcul du rang de A donne bien 4 donc A est inversible et f est bijective (au vue de la question on peut tout de suite se lancer dans le calcul de l'inverse et prouver du même coup que f est bijective).

   La matrice de f^{-1} dans la base canonique correspond donc à l'inverse de A.

   Le calcul de cet inverse en résolvant un système de Cramer nous donne :

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

   Alors $AX = \begin{pmatrix} x \\ 3y - z \\ 2y \\ -x - 4y + 4z + 2t \end{pmatrix}$

   On en déduit donc :

   $f(x, y, z, t) = (x, 3y - z, 2y, x - 4y + 4z + 2t)$

   De la même manière en calculant $A^{-1}X$ on obtient :

   $f^{-1}(x, y, z, t) = (x, \frac{z}{2}, -y + \frac{3}{2}z, \frac{1}{2}x + 2y - 2z + \frac{1}{2}t)$

3. f^2 est représenté matriciellement par $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ -3 & -12 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

   On constate que $A^2 - 3A + 2I_4 = O_{\mathbb{R}^4}$
   d'où $A(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_4) = I_4$
   Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_4$
   C'est à dire f est bijective et $f^{-1} = \frac{-1}{2}f + \frac{3}{2}Id_4$

4. g a comme matrice dans la base canonique $B = A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

   On obtient $Ker(g) = vect((2, \frac{1}{2}, 1, 0)(1, 0, 0, 1))$
   Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, il s'agit d'une base de $Ker(g)$ qui est donc de dimension 2.
   Méthode 1 : base de $Im(f)$ avec théorème du rang :
   Le théorème du rang donne alors $dim(Ker(g)) + rg(g) = 4$ donc $rg(g) = 2$. Il suffit donc de déterminer deux vecteurs non colinéaires appartenant à $Im(g)$ afin d'obtenir une base de $Im(g)$.
   Remarquons que $(0, 0, 0, 1)$ et $(0, 2, 2, -4)$ sont deux vecteurs de $Im(g)$ non colinéaires donc $Im(g) = vect((0, 0, 0, 1), (0, 2, 2, -4))$.
   Méthode 2 : base de $Im(f)$ sans théorème du rang en faisant preuve d'intelligence :
   Une analyse de la matrice montre que $C_1 = -C_4$ et que $C_2 = -2C_3 - 4C_4$. D'autre part C_3 et C_4 sont des colonnes non colinéaires. Donc $rg(A) = 2$ et $Im(g) = vect((0, -1, -1, 4), (0, 0, 0, 1))$.
   Méthode 3 : base de $Im(f)$ sans théorème du rang :
   Calculons le rang de g en échelonnant la matrice B sur les colonnes. Ce qui nous fournira une base de $Im(g)$.
   $Rg(g) = Rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
   On effectue $C_4 \leftarrow C_4 + C_1$ et $C_3 \leftarrow 2C_3 + C_2$.
   Ainsi $Rg(g) = Rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
   On effectue alors $C_3 \leftarrow C_3 + 4C_1$.
   Ainsi $Rg(g) = Rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   On trouve donc $R(g) = dim(Im(g)) = 2$
   et $Im(g) = vect((0, 0, 0, -1), (0, 2, 2, -4))$

Exercice 18:

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

   $$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(h) \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + 2z & = & 0 \\ -x + y + z & = & 0 \\ -2x + y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \ldots \\ & \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \in vect((1,0,1)) \end{aligned}$$

   Ainsi $Ker(h) = vect((1, 0, 1))$.

Méthode 1 : base de $Im(f)$ avec théorème du rang :
D'après le théorème du rang $dim(Ker(h)) + rg(h) = 3$ donc $rg(h) = 2$. Donc il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires de $Im(h)$ pour obtenir une base.
Prenons par exemple $(1, 1, 1)$ et $(2, 1, 2)$. On a donc $Im(h) = vect((1, 1, 1), (2, 1, 2))$.
Méthode 2 : base de $Im(f)$ sans théorème du rang en faisant preuve d'intelligence :
On remarque dans la matrice que $C_1 = -C_3$ et que C_2 et C_3 ne sont pas des colonnes colinéaires. Donc le rang de h est égal à 2 et $Im(h) = vect((1, 1, 1), (2, 1, 2))$.
Méthode 3 : base de $Im(f)$ sans théorème du rang :
$Rg(h) = rg(A) = Rg \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ en faisant $L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$Im(h) = vect((-2, -1, -2), (1, 1, 1), (2, 1, 2)) = vect((1, 1, 1), (2, 1, 2))$ car $(-2, -1, -2) = -(2, 1, 2)$
h n'est ni injective ni surjective.

3. $B = \mathcal{M}(h^2) = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $Rg(h^2) = Rg(B) = 1$ car 3 lignes identiques.
   $Im(h^2) = vect((-1, -1, -1), (1, 1, 1), (1, 1, 1)) = vect((1, 1, 1))$
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
   $$\begin{aligned} (x,y,z) \in Ker(h^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y + z \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (y + z, y, z) \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y, z) \in vect((1, 1, 0), (1, 0, 1) \end{aligned}$$
   Ainsi $Ker(h^2) = vect((1, 1, 0), (1, 0, 1)$
5. soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. L'écriture matricielle de h^2 est $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ -x + y + z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$
   Ainsi $h^2(x, y, z) = (-x + y + z, -x + y + z, -x + y + z)$
6. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A^n = B$. On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, h^n = h^2$.
   De plus $h^1 = h$ et $h^0 = Id_3$.

Exercice 19:

1. $Im(f) \subset \mathbb{R}^m$ donc g est bien définie sur $Im(f)$. D'autre part les propriétés de linéarité de g sont conservées ($Im(f) \subset \mathbb{R}^p$ est un espace vectoriel).
   On a $Ker(g_{|Im(f)}) \subset Im(f)$ par définition de $g_{|Im(f)}$. D'autre part soit $x \in Im(f)$:
   $$x \in Ker(g_{|Im(f)}) \Leftrightarrow g_{|Im(f)}(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in Ker(g).$$
   Donc $Ker(g_{|Im(f)}) = Ker(g) \cap Im(f)$
2. Appliquons le théorème du rang à $g_{|Im(f)}$. On alors :
   $$dim(Im(f)) = dim(Ker(g_{|Im(f)})) + rg(g_{|Im(f)}) = dim(Ker(g) \cap Im(f)) + rg(g_{|Im(f)})$$
   Il faut montrer que $rg(g_{|Im(f)}) = rg(g \circ f)$. Pour cela montrons par double inclusion qu'en fait $Im(g \circ f) = Im(g_{|Im(f)})$.
   - Soit $y \in Im(g \circ f)$ il existe alors $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(f(x)) = y$. Or $f(x) \in Im(f)$ donc $y \in Im(g_{|Im(f)})$. Donc $Im(g \circ f) \subset Im(g_{|Im(f)})$.
   - Soit $y \in Im(g_{|Im(f)})$ alors il existe $x \in Im(f)$ tel que $g_{|Im(f)}(x) = g(x) = y$. Et comme $x \in Im(f)$, il existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_1) = x$. Donc $y = g(f(x_1))$. Donc $y \in Im(g \circ f)$.

Donc $Im(g \circ f) = Im(g_{|Im(f)})$ et leurs dimensions sont égales d'où l'égalité demandée.

3. Il faudrait montrer que $dim(Ker(g) \cap Im(f)) \leq m - rg(g)$.
Appliquons le théorème du rang à g : $rg(g) + dim(Ker(g)) = m$. Donc $dim(Ker(g)) = m - rg(g)$.
Or $(Ker(g) \cap Im(f)) \subset Ker(g)$ donc $dim(Ker(g) \cap Im(f)) \leq dim(Ker(g))$ donc $dim(Ker(g) \cap Im(f)) \leq m - rg(g)$. Donc $-dim(Ker(g) \cap Im(f)) \geq -m + rg(g)$
Donc :
$$rg(f) - dim(Ker(g) \cap Im(f)) \geq rg(f) + rg(g) - m$$
Avec la question 2 on obtient bien :
$$rg(g \circ f) \geq rg(f) + rg(g) - m$$

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice 20:

Partie A : étude de l'application f

1. Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$. On a
$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (2(\lambda x + x') - 3(\lambda z + z'), -2(\lambda x + x') + \lambda y + y' + 6(\lambda z + z'), -(\lambda z + z')) \\ &= (2\lambda x + 2x' - 3\lambda z - 3z', -2\lambda x - 2x' + \lambda y + y' + 6\lambda z + 6z', -\lambda z - z') \\ &= (\lambda(2x - 3z) + (2x' - 3z'), \lambda(-2x + y + 6z) + (-2x' + y' + 6z'), \lambda(-z) + (-z')) \\ &= (\lambda(2x - 3z), \lambda(-2x + y + 6z), \lambda(-z)) + (2x - 3z', -2x' + y' + 6z', -z') \\ &= \lambda(2x - 3z, -2x + y + 6z, -z) + (2x' - 3z', -2x' + y' + 6z', -z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$
Comme les espaces de départ et d'arrivée coïncident, on peut conclure que $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

2. On a $f(1, 0, 0) = (2, -2, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (-3, 6, -1)$ donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a
$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ &\iff (2x - 3z, -2x + y + 6z, -z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 2x & & & - & 3z & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ -2x & + & y & + & 6z & = & 0 & \mathrm{L}_2 \\ & & & - & z & = & 0 & \mathrm{L}_3 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 2x & & & - & 3z & = & 0 & \mathrm{L}_1 \\ & & y & + & 3z & = & 0 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \\ & & & & z & = & 0 & \mathrm{L}_3 \end{array} \right. \\ &\iff u = (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$
Finalement, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$ et donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

4. L'application linéaire f est injective. De plus, les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont de même dimension finie (en l'occurrence 3) donc f est bijective. Finalement, $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

Partie B : sous-espaces propres associés à f

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rg}(f-\alpha\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \operatorname{Rg}(A-\alpha I_3)\\
&= \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & -3\\ -2 & 1-\alpha & 6\\ 0 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1\\ L_2\\ L_3 \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1-\alpha & 6\\ 2-\alpha & 0 & -3\\ 0 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1\\ L_2 \leftrightarrow L_1\\ L_3 \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1-\alpha & 6\\ 0 & (2-\alpha)(1-\alpha) & 6(1-\alpha)\\ 0 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1\\ L_2 \leftarrow (2-\alpha)\,L_1 + 2\,L_2\\ L_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\operatorname{Rg}(f-\alpha\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{cases} 3 & \text{si } \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}\\ 2 & \text{si } \alpha\in\{-1,1,2\} \end{cases}}$$

(b) On sait que, pour tout nombre réel α, l'endomorphisme $f-\alpha\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijectif si et seulement si son rang n'est pas maximal, c'est-à-dire si et seulement si son rang n'est pas égal à 3. Donc

$$\boxed{f-\alpha\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} \text{ n'est pas bijectif si et seulement si } \alpha\in\{-1,1,2\}}$$

2. On a $f(0,2,0)=(0,2,0)$ donc $\boxed{(0,2,0)\in E_1(f)}$.

3. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrons que $E_\alpha(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - ⋆ Comme f est linéaire, on a $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} = \alpha\times 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3}\in E_\alpha(f)$.
   - ⋆ Soit $(u,v)\in E_\alpha(f)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Montrons que $\lambda u+\beta v\in E_\alpha(f)$. On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda u+\mu v) &= \lambda f(u)+\mu f(v) && (\text{car } f \text{ est linéaire})\\
&= \lambda\alpha u+\mu\alpha v && (\text{car } u\in E_\alpha(f) \text{ et } v\in E_\alpha(f))\\
&= \alpha(\lambda u+\mu v)
\end{aligned}$$

   Finalement, $\lambda u+\mu v\in E_\alpha(f)$.

   On conclut donc que $\boxed{E_\alpha(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.
   Remarque. On pouvait aussi remarquer que

$$E_\alpha(f) = \left\{u\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (f-\alpha\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\} = \operatorname{Ker}(f-\alpha\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

   et comme le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ (c'est du cours), on peut conclure rapidement que $E_\alpha(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. ⋆ **Détermination de $E_{-1}(f)$.** Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
u\in E_{-1}(f) &\iff f(u)=-u \iff f(x,y,z) = -(x,y,z)\\
&\iff \begin{cases} 2x - 3z = -x\\ -2x + y + 6z = -y\\ -z = -z \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} 3x - 3z = 0\\ -2x + 2y + 6z = 0\\ 0 = 0 \end{cases}\\
&\iff x = z \text{ et } y = -2z\\
&\iff u = (z,-2z,z) = z(1,-2,1)\\
&\iff u\in\operatorname{vect}((1,-2,1))
\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\boxed{E_{-1}(f) = \operatorname{vect}((1,-2,1))}$. La famille $((1,-2,1))$ est génératrice de $E_{-1}(f)$ et elle est constituée d'un seul vecteur non nul donc il s'agit d'une base de $E_{-1}(f)$.

⋆ **Détermination de $E_1(f)$.** Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
u\in E_1(f) \iff f(u)=-u \iff & f(x,y,z)=(x,y,z)\\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & 3z & = & x\\ -2x & + & y & + & 6z & = & y\\ & & & - & z & = & z\end{array}\right.\\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & 3z & = & 0\\ -2x & & & + & 6z & = & 0\\ & & & - & 2z & = & 0\end{array}\right.\\
\iff & x=z=0\\
\iff & u=(0,y,0)=y(0,1,0)\\
\iff & u\in\operatorname{vect}((0,1,0))
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{E_1(f)=\operatorname{vect}((0,1,0))}$. La famille $((0,1,0))$ est génératrice de $E_1(f)$ et elle est constituée d'un seul vecteur non nul donc il s'agit d'une base de $E_1(f)$.

⋆ **Détermination de $E_2(f)$.** Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}
u\in E_2(f) \iff f(u)=-u \iff & f(x,y,z)=-(x,y,z)\\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & 3z & = & 2x\\ -2x & + & y & + & 6z & = & 2y\\ & & & - & z & = & 2z\end{array}\right.\\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & - & 3z & = & 0\\ -2x & - & y & + & 6z & = & 0\\ & & & - & 3z & = & 0\end{array}\right.\\
\iff & z=0 \text{ et } y=-2x\\
\iff & u=(x,-2x,0)=x(1,-2,0)\\
\iff & u\in\operatorname{vect}((1,-2,0))
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{E_2(f)=\operatorname{vect}((1,-2,0))}$. La famille $((1,-2,0))$ est génératrice de $E_2(f)$ et elle est constituée d'un seul vecteur non nul donc il s'agit d'une base de $E_2(f)$.

Partie C : diagonalisation de l'endomorphisme f

1. Calculons le rang de la famille $\mathcal{B}_1$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rg}(\mathcal{B}_1) &= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\1&0&0\end{pmatrix} \begin{array}{l}\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_2\\ \mathrm{L}_3\end{array}\\
&= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \begin{array}{c}\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2+2\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1\end{array}\\
&= 3
\end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B}_1$ est de rang 3 dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 et cette famille comporte trois vecteurs. Donc $\boxed{\mathcal{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. $\boxed{\text{Une telle application linéaire existe et est unique car } \mathcal{B}_0=(e_1,e_2,e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$. De plus,

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-2\\1&0&0\end{pmatrix}}$$

3. On sait que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice P est inversible. Étudions donc l'inversibilité de cette matrice. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On résout l'équation $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &\iff (x+z, -2x+y-2z, x) = (X, Y, Z) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & & & + & z & = & X & \mathrm{L}_1 \\ -2x & + & y & - & 2z & = & Y & \mathrm{L}_2 \\ x & & & & & = & Z & \mathrm{L}_3 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & & & + & z & = & X & \mathrm{L}_1 \\ & & y & & & = & 2X+Y & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\,\mathrm{L}_1 \\ & & & & z & = & X-Z & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le système obtenu est de Cramer donc la matrice P est inversible. De plus,

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = X - z = Z \\ y = 2X + Y \\ z = X - Z \end{array} \right. \\ &\iff \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3 \text{ et la matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathcal{B}_0 \text{ est } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

4. La matrice C de g est $\boxed{C = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

5. (a) L'égalité $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ se traduit matriciellement par $\boxed{C = P^{-1}AP}$.

   (b) En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} dans l'égalité $C = P^{-1}AP$, on trouve (en utilisant aussi le fait que $PP^{-1} = P^{-1}P = I_3$) que $A = PCP^{-1}$. On conjecture alors que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = PC^nP^{-1}$. On démontre cela à l'aide d'une récurrence simple. Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition « $A^n = PC^nP^{-1}$ ».

   ⋆ **Initialisation.** Montrons que la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie. On a

   $$PC^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 \qquad \text{et} \qquad A^0 = I_3$$

   donc $PC^0P^{-1} = A^0$ et donc a proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   ⋆ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé) tel que la proposition $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Montrons qu'alors la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a

   $$\begin{aligned} A^{n+1} = A^nA &= (PC^nP^{-1})(PCP^{-1}) \qquad \text{(car } \mathcal{P}_n \text{ est vraie} \\ &= PC^nI_3CP^{-1} \\ &= PC^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

   et donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   ⋆ **Conclusion.** Pour tout entier naturel n, on a $\boxed{A^n = PC^nP^{-1}}$ par principe de récurrence simple.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $f^n(x, y, z)$. La matrice de f^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A^n et on a (puisque la matrice C est diagonale) :

$$\begin{aligned}
A^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= PC^nP^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & (-1)^n - 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & 1 & -2(-1)^n + 2^{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n x + ((-1)^n - 2^n)z \\ (2 - 2^{n+1})x + y + (-2(-1)^n + 2^{n+1})z \\ (-1)^n z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'expression analytique cherchée est donc

$$\boxed{f^n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(2^n x + ((-1)^n - 2^n)z, (2 - 2^{n+1})x + y + (-2(-1)^n + 2^{n+1})z, (-1)^n z\right) \end{array} \right.}$$