

## CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 7

## Exercice 3.

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $f$  est définie en  $x$

$$\text{ssi } \begin{cases} x \mapsto x \text{ est définie en } x \\ x \mapsto e^x - e^{-x} \text{ est définie en } x \\ e^x - e^{-x} \neq 0 \end{cases} \quad \text{ssi } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \\ e^x \neq e^{-x} \end{cases} \quad \text{ssi } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq -x \end{cases} \quad \text{ssi } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{ssi } x \in \mathbb{R}^*$$

Le domaine de définition de  $f$  est donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $-x \in \mathbb{R}^*$  et

$$f(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - e^x} = \frac{-x}{-(e^x - e^{-x})} = \frac{x}{e^x - e^{-x}} = f(x)$$

Donc  $f$  est paire.

3. (a) On a  $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$  et  $e^X - 1 \underset{X \rightarrow 0}{\sim} X$ . Ainsi,  $1 - e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -(-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

Par quotient,  $\frac{1 - e^{-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x} = 2$  par somme car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1$

(c)  $\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{x}} = \frac{1}{2}$

$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x(1 - e^{-2x})} = 0$

car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2x} = 1$

Donc  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$ .

$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  car la fonction  $f$  est paire.

Donc  $\mathcal{C}_f$  admet aussi une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  en  $-\infty$ .

4. (a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = e^x + e^{-x} - ((e^x + e^{-x}) + x(e^x - e^{-x})) = -x(e^x - e^{-x})$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$e^x - e^{-x} > 0 \iff e^x > e^{-x} \iff x > -x$  car la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$\iff 2x > 0 \iff x > 0$ .

On en déduit le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-x$	$+$	$0$	$-$
$e^x - e^{-x}$	$-$	$0$	$+$
$g'(x)$	$-$	$0$	$-$
$g$			

La dérivée de  $g$  est négative sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule qu'en un point, donc  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

(b) On a  $g(0) = 0$ .

Après avoir placé le 0 dans le tableau de variations, on en déduit :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$0$	$-$

5. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . En effet, la fonction  $f$  est un quotient de fonction dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{g(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$ .

6. On obtient le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$0$	$-$
$(e^x - e^{-x})^2$	$+$	$0$	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f$	$0$	$\frac{1}{2}$	$0$

7. La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ . De plus,  $\frac{1}{4} \in f(]0; +\infty[) = ]0; \frac{1}{2}[$ .

Donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $x \in ]0; +\infty[$  tel que  $f(x) = \frac{1}{4}$ .

## Problème 2.

### Partie A : Quelques exemples pour se faire la main

1. (a)  $P(B_1) = \frac{1}{2}$  et  $P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}$ .

(b) Dans le système complet d'événements de probabilités non nulles  $(B_1, \overline{B_1})$ , d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1}) \cdot P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. (a) L'univers image de  $X_1$  est  $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ . On a  $P(X_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{2}$  et  $P(X_1 = 1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$ . La variable  $X_1$  suit une loi uniforme de paramètre 2.

(b) L'univers image de  $X_2$  est  $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ .

$$P(X_2 = 3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)) \\ &= P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}) \cdot P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et

$$P(X_2 = 1) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$X_2$  suit une loi uniforme de paramètre 3.

### Partie B : Simulation informatique

1. Fonction très classique : on considère que les boules de 1 à  $nb$  sont blanches et que les suivantes sont noires. Il y a  $nb+nb$  boules dans l'urne.

```

from random import*
def simultirage(nb,nn):
    B=randint(1,nn+nb)
    if B<=nb :
        return 0
    else:
        return 1

```

2. Deux versions. Dans les deux cas la boucle permet de faire  $n$  tirages. Les variables  $nb$  et  $np$  notent le nombre de boules blanches et noires actuellement dans l'urne.

Dans le deuxième cas on se sert du fait que  $x = 1$  quand la boule est noire et 0 quand elle est blanche (quand  $x = 0$  on ajoute une boule blanche ( $1-x=1$ ), quand  $x = 1$  on rajoute une boule noire).

```

def simulXn(n):
    nb=1
    nn=1
    for i in range(n):
        x=simultirage(nb,nn)
        if x==0:
            nb=nb+1
        else :
            nn=nn+1
    return nb

```

```

def simulXn(n):
    nb=1
    nn=1
    for i in range(n):
        x=simultirage(nb,nn)
        nn=nn+x
        nb=nb+(1-x)
    return nb

```

3. On effectue la moyenne des valeurs trouvées pour  $X_n$  après  $N$  tirages.

```

def simulEXn(n,N):
    S=0
    for i in range(N):
        S=S+simulXn(n)
    return S/N

```

4. On répète un grand nombre de fois l'expérience et on fait la moyenne des probabilités obtenues.

```

def probaB_n(n,N):
    S=0
    for k in range(N):
        X=simulXn(n)
        S=S+X/(n+2)
    return S/N

```

### Partie C : Résultat théorique

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ .

- (a) Sachant  $X_n = k$ , il y a  $k$  boules blanches dans l'urnes et  $2+n-k$  boules noires. Donc il y a  $n+2$  boules dans l'urne.  
 (b) Dans le système complet d'événements de probabilités non nulles  $(X_n = i)_{1 \leq i \leq n+1}$ , d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) \cdot P_{X_n=i}(X_{n+1} = k)$$

Or si  $i < k-1$ , on a  $P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = 0$ . En effet, si on ajoute un tirage supplémentaire, on peut ajouter 0 ou une boule blanche dan l'urne. De plus si  $i > k$   $P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = 0$ . En effet, on ne peut pas retirer des boules de l'urne. On obtient

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_n = k-1) \cdot P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k) \cdot P_{X_n=k}(X_{n+1} = k) \\ &= P(X_n = k-1) \cdot \frac{k-1}{n+2} + P(X_n = k) \cdot \frac{2+n-k}{n+2} \text{ en utilisant la question précédente.} \end{aligned}$$

On a montré que

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2} P(X_n = k) + \frac{k-1}{n+2} P(X_n = k-1).$$

(c) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{P}(n)$  la propriété : " $X_n$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ."

D'après la question 2.(a), la propriété  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que la propriété  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. On montre  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Par hypothèse de récurrence,  $X(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  et  $\forall i \in X(\Omega) P(X_n = i) = \frac{1}{n+1}$ .

D'après la question précédente, pour tout  $k \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$ .

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{n+2} \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}.$$

donc la propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

On a montré par principe de récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la variable aléatoire  $X_n$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$

(d) L'espérance de la loi uniforme est  $E(X_n) = \frac{n+2}{2}$

(e) D'après le théorème de Koenig-Huygens

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+2)^2}{4} = \frac{n+2}{12} \cdot (2(2n+3) - 3(n+2)) = \frac{(n+2)n}{12}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans le système complet d'événements de probabilités non nulles  $(X_n = i)_{1 \leq i \leq n}$ , d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) \cdot P_{X_n=i}(B_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{i}{n+2} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=1}^{n+1} i \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Exercice 3.

1. (a) On a  $n$  réalisations indépendantes d'un schéma de Bernoulli où le succès "répondre à l'invitation" a lieu avec une probabilité  $p$ . Donc  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , soit  $Y \leftrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

(b) On a donc  $E(Y) = np$  et  $V(Y) = np(1-p)$ .

(c) `from random import *`

```
def Y(n,p) :
    s=0
    for i in range(n):
        x=random()
        if x<p:
            s=s+1
    return s
```

2. (a) On a  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

(b) Soit  $(i, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ .

**Premier cas** :  $n - i < k \leq n$ . Alors  $i + k > n$ . Comme il y a  $n$  invitations, le nombre de réponses du premier et du deuxième envoi ne peut pas être supérieur à  $n$ . Donc

$$P_{(Y=i)}(Z = k) = 0$$

**Deuxième cas** :  $0 \leq k \leq n - i$ . Après le premier envoi, si  $i$  personnes ont répondu, il reste  $n - i$  personnes à qui l'invitation a été envoyée une deuxième fois. Ses personnes répondent ou non de manière indépendantes et la probabilité de réponse est  $p$ . Ainsi, sachant que  $Y = i$ ,  $Z$  suit une loi binomiale de paramètres  $n - i$  et  $p$ . Donc

$$P_{(Y=i)}(Z = k) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}$$

3. (a) def  $X(n, p)$  :

$i=Y(n, p)$

$s=i$

for  $k$  in range( $n-i$ ):

$x=random()$

if  $x < p$ :

$s=s+1$

return  $s$

(b) Soit  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 \leq j \leq k \leq n$ .

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{(k-j)!j!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-j)!j!} = \binom{n}{k} \binom{k}{j}$$

(c) On a  $X(\omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

(d) L'événement  $X = 0$  est l'événement  $Y + Z = 0$ . Comme  $Y$  et  $Z$  sont des variables aléatoires positives, cela signifie que  $Y + Z = 0 \iff (Y = 0) \cap (Z = 0)$ . Ainsi,

$P(X = 0) = P(Y + Z = 0) = P(Y = 0 \cap Z = 0) = P(Y = 0) \cdot P_{(Y=0)}(Z = 0)$  d'après la formule des probabilités composées.

Donc  $P(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^{2n}$ .

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(Y + Z = 1) \\ &= P(Y = 0 \cap Z = 1) + P(Y = 1 \cap Z = 0) \quad \text{car les événements sont disjoints.} \\ &= P(Y = 0) \cdot P_{(Y=0)}(Z = 1) + P(Y = 1) \cdot P_{(Y=1)}(Z = 0) \\ &= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \cdot \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} \cdot \binom{n-1}{0} p^0 (1-p)^{n-1} \\ &= np(1-p)^{2n-1} + np(1-p)^{2n-2} \\ &= np(1-p)^{2n-2}(1-p+1) \\ &= n \cdot p(2-p) \cdot (1-p)^{2n-2} \end{aligned}$$

(e) Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

La famille  $(Y = i)$  forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= P(Y + Z = k) \\
&= \sum_{i=0}^n P(Y + Z = k \cap Y = i) \\
&= \sum_{i=0}^n P(Z = k - i \cap Y = i) \\
&= \sum_{i=0}^k P(Z = k - i \cap Y = i) \quad \text{car } k - i \in \mathbb{Z}(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\
&= \sum_{i=0}^k P(Y = i)P_{(Y=i)}(Z = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k} \quad \text{d'après 2b)} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} 1^i \quad \text{par linéarité et d'après 3b)} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (1-p+1)^k \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \binom{n}{k} (p(2-p))^k (1-p)^{2(n-k)}
\end{aligned}$$

- (f) Pour tout  $k \in X(\Omega)$ ,  $P(X = k) = \binom{n}{k} (p(2-p))^k (1-p)^{2(n-k)}$   
Donc  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - (1-p)^2)$ .

#### Exercice 4.

1. (a) Soit  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\alpha c + \beta d + \gamma e = 0_{\mathbb{R}^4} &\iff \alpha(-2, 2, -3, 1) + \beta(1, 4, -2, 2) + \gamma(8, 2, 5, 1) = (0, 0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} -2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 & L_1 \\ 2\alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 & L_2 \\ -3\alpha - 2\beta + 5\gamma = 0 & L_3 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & L_4 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 & L_1 \\ \beta + 2\gamma = 0 & L_2 \leftarrow \frac{L_2 + L_1}{5} \\ -\beta - 2\gamma = 0 & L_3 \leftarrow \frac{2L_3 - 3L_1}{7} \\ \beta + 2\gamma = 0 & L_4 \leftarrow \frac{2L_4 + L_1}{5} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \alpha = 3\gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases} \\
&\iff (\alpha, \beta, \gamma) = (3\gamma, -2\gamma, \gamma)
\end{aligned}$$

Pour  $\gamma = 1$ , on trouve donc que  $\boxed{3c - 2d + e = 0_{\mathbb{R}^4}}$ . Donc  $\boxed{\text{la famille } (c, d, e) \text{ n'est pas libre}}$ .

- (b) On sait que  $\text{rang}(c, d, e) = \dim(\text{vect}(c, d, e))$ . Comme  $e = 2d - 3c$  on a :  
 $\text{vect}(c, d, e) = \text{vect}(c, d)$ . Les vecteurs  $c$  et  $d$  ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre. Donc  
 $\text{rang}(c, d, e) = \dim(\text{vect}(c, d, e)) = \dim(\text{vect}(c, d)) = 2$
- (c) Calculons le rang de la famille  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(\mathcal{B}) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\ L_4 \end{matrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - L_2 \end{matrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + L_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Donc  $\text{rg}(\mathcal{B}) = 4$ . De plus, la famille  $\mathcal{B}$  est composée de quatre vecteurs et  $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ . Par conséquent,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .

(d) Comme  $c = 0 \times a + 0 \times b + 1 \times c + 0 \times d$ , la matrice des coordonnées de  $c$  dans exprimés dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ De même, } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(d) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ De plus, on sait d'après la question 1.(a) que } e = -3c + 2d \text{ donc}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in G &\iff \begin{cases} x - z - t = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z + t \\ y = 2t \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = (z + t, 2t, z, t) = z(1, 0, 1, 0) + t(1, 2, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1)) \end{aligned}$$

Donc :

$$G = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1)) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4$$

(b) La famille  $((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1))$  est génératrice de  $G$ . Elle est de plus libre car composée de deux vecteurs non colinéaires. Donc  $((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 1))$  est une base de  $G$  et  $\dim(G) = 2$ .

(c) On a  $-2 - (-3) - 1 = 0$  et  $2 - 2 \times 1 = 0$  donc  $c$  appartient à  $G$ . D'après la question 2.(a), le vecteur  $f = (1, 0, 1, 0)$  appartient à  $G$ . Comme  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ , il est stable par combinaison linéaire. On a donc l'inclusion  $\text{Vect}(c, f) \subset G$ . Or la famille  $(c, f)$  est libre (car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires) donc la dimension de  $\text{Vect}(c, f)$  vaut 2. Donc  $\text{Vect}(c, f) = G$  et la famille  $(c, f)$  est aussi une famille génératrice de  $G$ . Finalement,

$$\text{la famille } (c, f), \text{ où } f = (1, 0, 1, 0) \text{ est une base de } G$$

(d) Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Déterminons le rang de la famille  $(u_m, v_m)$  :

$$\begin{aligned} \text{rg}(u_m, v_m) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2m & m+6 \\ 2m & -4 \\ 0 & m+2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2m & m+6 \\ 0 & m+2 \\ 0 & m+2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} -2m & m+6 \\ 0 & m+2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \end{matrix} \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{rg}(u_m, v_m) = 2 \iff -2m \neq 0 \text{ et } m+2 \neq 0 \iff m \neq 0 \text{ et } m \neq -2$$

Comme la famille  $(u_m, v_m)$  est constituée de deux vecteurs, elle est libre si et seulement si son rang vaut 2. Finalement,

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{R}, \text{ la famille } (u_m, v_m) \text{ est libre si et seulement si } m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

(e) `def appartientG(m):`  
`if -2*m==0:`  
`return True`  
`else :`  
`return False`

(f) Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On commence par vérifier si les vecteurs  $u_m$  et  $v_m$  appartiennent à  $G$ . On a :

$$u_m \in G \iff -2m = 0 \text{ et } 2m = 0 \iff m = 0$$

Or on sait que la famille  $(u_0, v_0)$  est liée d'après la question 2.(c). Ce n'est donc pas une base de  $G$ . Finalement,

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{R}, \text{ la famille } (u_m, v_m) \text{ n'est pas une base de } G.$$

3. (a) Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in F &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = \alpha c + \beta d \\
 &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = \alpha(-2, 2, -3, 1) + \beta(1, 4, -2, 2) \\
 &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -2\alpha + \beta = x & L_1 \\ 2\alpha + 4\beta = y & L_2 \\ -3\alpha - 2\beta = z & L_3 \\ \alpha + 2\beta = t & L_4 \end{cases} \\
 &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -2\alpha + \beta = x & L_1 \\ 5\beta = x + y & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -7\beta = -3x + 2z & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ 5\beta = x + 2t & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \end{cases} \\
 &\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -2\alpha + \beta = x & L_1 \\ 5\beta = x + y & L_2 \\ 0 = -8x + 7y + 10z & L_3 \leftarrow 5L_3 + 7L_2 \\ 0 = y - 2t & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 8x - 7y - 10z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement, une écriture cartésienne de  $F$  est :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 8x - 7y - 10z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\}$$

(b) Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in F \cap G &\iff \begin{cases} x - z - t = 0 & L_1 \\ 8x - 7y - 10z = 0 & L_2 \\ y - 2t = 0 & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - z - t = 0 & L_1 \\ -7y - 2z + 8t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \\ y - 2t = 0 & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - z - t = 0 & L_1 \\ -7y - 2z + 8t = 0 & L_2 \\ -2z - 6t = 0 & L_3 \leftarrow 7L_3 + L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{14}{7}t \\ z = -3t \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z, t) = \left(-2t, \frac{14}{7}t, -3t, t\right) \\
 &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}\left(\left(-2, \frac{14}{7}, -3, 1\right)\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $F = \text{Vect}\left(\left(-2, \frac{14}{7}, -3, 1\right)\right) = \text{Vect}((-14, 14, -21, 7))$ . La famille  $((-14, 14, -21, 7))$  est génératrice de  $F \cap G$  et elle est libre car constituée d'un seul vecteur *non nul*. Ainsi,

$$\text{la famille } ((-14, 14, -21, 7)) \text{ est une base de } F \cap G$$