

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1: Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{aligned}
 f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x - 1 \end{cases} & \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto xy \end{cases} & \quad f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (2y, x, |y|) \end{cases} \\
 f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (\sin(x+y), x) \end{cases} & \quad f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (2x - 3y, x - y, x + 2y) \end{cases} \\
 f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, 0) \end{cases} & \quad f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (y, y) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice n° 2:

Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes (on en donnera notamment une base) et indiquer ce qu'on peut en déduire pour l'application.

$$\begin{aligned}
 f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (3x - y + z, -x + 5y - z, 2x + 4y) \end{cases} & \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + 2y, x + 3y) \end{cases} \\
 f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x - y + 4z, 3x - z) \end{cases} & \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x - y, 3y + z, -z) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice n° 3:

Déterminer l'image des applications suivantes (on en donnera notamment une base) et indiquer ce qu'on peut en déduire pour l'application.

$$\begin{aligned}
 f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x - y, -x + 2y - z, x - y) \end{cases} & \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + 2y, x + y) \end{cases} \\
 f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, x, 3y) \end{cases} & \quad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x - y, 3y + z, -z) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice n° 4: Montrer que les endomorphismes suivants sont des automorphismes et donner leurs réciproques.

- f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $f(x, y, z) = (x + y + z, x - z, y + 3z)$.
- g l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par $g(x, y) = (x - y, 3x + y)$.
- h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $h(x, y, z) = (x + y + z, y + z, 2z)$.

Exercice n° 5: Déterminer le rang des applications suivantes. En déduire si elles sont injectives ou surjectives.

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, x + y)$
- $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z, t) = (2x + y + 3z + 10t, 2x - y + z + 2t, 5x - y + 4z + 10t)$.
- $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y, z) = (x - y, 2x + 2z, 3x - y + 2z)$

Exercice n° 6:

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y + z, x + 2y - z) \end{cases}$

1. Montrer que f est une application linéaire. Préciser sa matrice relativement aux bases canoniques.
2. Déterminer et caractériser $Im(f)$ et $Ker(f)$.

Exercice n° 7:

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y - z, -3x + 4y - 3z, y - x) \end{cases}$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer sa matrice M relativement à la base canonique.
3. Vérifier que $M^2 - 3M + 2I_3 = O_3$. Que peut-on en déduire ?
4. Soit $e_1 = (1, 1, 0), e_2 = (0, 1, 1), e_3 = (1, 3, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

Exercice n° 8:

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : E \rightarrow F$ l'application linéaire associée à B dans des bases \mathcal{B} et \mathcal{G} des espaces vectoriels E et F .

1. Quelle est la dimension de E ? Quelle est la dimension de F ?
2. Déterminer une base du noyau de f .
3. Déterminer une base de l'image de f .
4. f est-elle injective? surjective?

Exercice n° 9:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 les bases canoniques de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

1. Déterminer l'écriture analytique de f .
2. Déterminer $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}'_2}$ avec $\mathcal{B}'_2 = ((1, 0), (-1, 1))$
3. Déterminer $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_2}$ avec $\mathcal{B}'_3 = ((1, -1, 1), (-1, -1, 1), (0, 2, 0))$

Exercice n° 10:

Pour chacun des exemples suivants, on définit une application linéaire f par la donnée de sa matrice relativement aux bases canoniques. Déterminer le rang de f , son noyau et son image (dont on donnera une base, la dimension et un système d'équations cartésiennes).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 11:

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Montrer que si f n'est pas l'application nulle alors f est surjective.

Je me perfectionne!

Exercice n° 12:

Soit (e_1, e_2, e_3) une base de \mathbb{R}^3 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démontrer que la donnée de $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = e_1 - e_2$, $f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$ définit un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

Comment choisir λ pour que f soit injective? Surjective?

Exercice n° 13:

Soit (i, j, k) la base canonique de \mathbb{R}^3 . on considère les vecteurs de \mathbb{R}^4 :

$$e_1 = (-1, 1, 1, 1), e_2 = (1, -1, 1, 1) \text{ et } e_3 = (1, 1, -1, 1).$$

1. Déterminer l'unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ telle que $f(i) = e_1$, $f(j) = e_2$, $f(k) = e_3$.
2. Déterminer le rang de f .
3. f est-elle injective? surjective?

Exercice n° 14:

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y - z, x + y - 2z, y - x) \end{cases}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer sa matrice relativement à sa base canonique.
3. Vérifier que $M^3 = aM^2 + bM$ où a et b sont des réels à déterminer. Que peut-on en déduire?
4. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice n° 15:

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ Montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(f^2))$.

Exercice n° 16:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^p .

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. Montrer que les 3 conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$
 - (b) $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$
 - (c) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$
3. On suppose que l'une des trois conditions est vérifiée. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^n)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^n)$.

Exercice n° 17:

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^4 et donner la matrice de f^{-1} dans la base canonique.
2. En déduire l'expression analytique de f et f^{-1} .
3. Déterminer une relation simple entre f^2 , f et Id_4 . retrouver alors le résultat précédent.
4. On pose $g = f - \text{Id}_4$. Déterminer la matrice B de g dans la base canonique puis donner une base et les dimensions de $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$. Que vaut $\text{Rg}(g)$?

Exercice n° 18:

Soit h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $h(x, y, z) = (-2x + y + 2z, -x + y + z, -2x + y + 2z)$

1. Déterminer A , la matrice de h dans les bases canoniques.
2. Déterminer le noyau, le rang et l'image de h .
3. Déterminer la matrice de $h^2 = h \circ h$.
4. Quel est le rang de h^2 ? Donner son noyau, son image.
5. Donner l'écriture analytique de h^2 .
6. Déterminer h^n pour tout n entier naturel.

Exercice n° 19:

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ avec $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$

1. Vérifier que la restriction de g à $\text{Im}(f)$ $g|_{\text{Im}(f)} : \begin{matrix} \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x \mapsto g(x) \end{matrix}$ définit bien une application linéaire et que $\text{Ker}(g|_{\text{Im}(f)}) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$.
2. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f))$.
3. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - m$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 20: Problème (réduction d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3).

On munit l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 de sa base canonique notée $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - 3z, -2x + y + 6z, -z) \end{cases}$$

Partie A : étude de l'application f

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Déterminer la matrice A de f dans la base \mathcal{B}_0 .
3. Étudier l'injectivité de f .
4. L'application f est-elle un automorphisme de \mathbb{R}^3 ? Justifier.

Partie B : sous-espaces propres associés à f

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Déterminer, en fonction du paramètre α , le rang de l'application linéaire $f - \alpha \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
 - (b) En déduire les valeurs de α pour lesquelles l'application $f - \alpha \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas bijective.

Pour tout nombre réel α , nous considérons le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 noté $E_\alpha(f)$ défini par :

$$E_\alpha(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = \alpha u\}$$

que l'on appelle le *sous-espace propre de f* associé au nombre réel α .

2. Pour $\alpha = 1$, montrer que le vecteur $(0, 2, 0)$ appartient à $E_1(f)$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (*quelconque*). Montrer que $E_\alpha(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
4. Déterminer une base de $E_{-1}(f)$, de $E_1(f)$ et de $E_2(f)$.

Partie C : diagonalisation de l'endomorphisme f

On considère les vecteurs $u_1 = (1, -2, 1)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ et $u_3 = (1, -2, 0)$ de \mathbb{R}^3 et on note \mathcal{B}_1 la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) .

1. Montrer que la famille \mathcal{B}_1 est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme φ de \mathbb{R}^3 tel que $\varphi(e_1) = u_1$, $\varphi(e_2) = u_2$ et $\varphi(e_3) = u_3$. Donner la matrice P de φ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Montrer que φ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de φ^{-1} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. On pose $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Déterminer la matrice C de g dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . On dit que l'on a *diagonalisé* l'endomorphisme f .
5. (a) Donner une relation entre les matrices A , C et P .
 (b) Calculer A^n pour tout entier naturel n .
 (c) Pour tout entier naturel n , en déduire l'expression analytique de l'endomorphisme f^n de \mathbb{R}^3 où :

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$$