

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

Étudier la continuité des fonctions définies sur \mathbb{R} dont l'expression est donnée ci-dessous :

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$2. g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$3. h(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$4. \ell(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)^2}{e^{x^2} - 1} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exercice n° 2:

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Déterminer les nombres a , b et c pour lesquels f est une fonction continue sur \mathbb{R} .

Exercice n° 3:

Soit f la fonction d'expression

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Étudier la continuité à gauche et à droite de f en n . La fonction f est-elle continue en ce point ?
- Quel est l'ensemble de continuité de la fonction f ?

Exercice n° 4:

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition que l'on précisera. Peut-on prolonger par continuité ces fonctions au point indiqué ?

$$1. a : x \mapsto \frac{1}{x-1} - \frac{2}{1-x^2} \text{ en } 1$$

$$2. b : x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}} \text{ en } -1$$

$$3. c : t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{1+t}-1} \text{ en } 0$$

$$4. d : u \mapsto \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) \text{ en } 1$$

$$5. f : x \mapsto x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0$$

$$6. g : t \mapsto \frac{6t^2 + 5t - 4}{2t - 1} \text{ en } \frac{1}{2}$$

$$7. h : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \text{ en } 0$$

Exercice n° 5:

Soit h la fonction définie d'expression $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Justifier que la fonction h est définie et continue sur \mathbb{R}^* .
2. Cette fonction est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ? à gauche en 0 ?
3. Peut-on prolonger par continuité la fonction h sur \mathbb{R} ?

Exercice n° 6:

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet trois solutions dans \mathbb{R} .

Exercice n° 7:

Un cycliste parcourt 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30 min pendant lequel il parcourt exactement 10 km.

Exercice n° 8:

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. En considérant la fonction $g : x \mapsto x - f(x)$ définie sur $[0, 1]$, montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice n° 9:

Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R} . On suppose que f est bornée. Montrer que les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice n° 10:

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). On suppose que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on ait $f(x) + \lambda \leq g(x)$.

Exercice n° 11:

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1. Montrer que la fonction $f : \begin{cases}]a, b[& \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \end{cases}$ réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Que peut-on dire de f^{-1} ?
3. Déterminer f^{-1} dans le cas particulier où $a = -1$ et $b = 1$.

Je me perfectionne!

Exercice n° 12:

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout entier $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x - n \ln x$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1, 2[$. On appellera a_n cette solution unique.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que cette suite est convergente de limite 1.

Exercice n° 13:

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^3 + 3x - n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} , que l'on notera u_n .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq n^{1/3}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\frac{u_n}{n^{1/3}}\right)^3 = 1 - \frac{3u_n}{n}$$

5. En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{1/3}$.

Exercice n° 14:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

2. En déduire que f est une fonction constante.

Exercice n° 15:

On veut déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{★}$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $f : x \mapsto ax$ convient.
2. Soit f une solution de l'équation fonctionnelle (★). On pose $a = f(1)$.

- (a) Calculer $f(0)$.
- (b) Montrer que la fonction f est impaire.
- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx) = nf(x)$ puis montrer que ce résultat reste valable si $n \in \mathbb{Z}$.
- (d) En déduire que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$$

- (e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = xa$.
Indication : on utilisera le fait que tout nombre réel peut s'écrire comme la limite d'une suite de rationnels (on a prouvé un résultat de ce type dans l'exercice 11 3) du TD16 sur les suites réelles).
3. Conclure quant à l'ensemble des solutions de (★).

Exercice n° 16:

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I . On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

1. Montrer que f est continue sur I .
2. On suppose que $0 < k < 1$ et que f a un point fixe noté l .
 - (a) Montrer que ce point fixe est unique.
 - (b) On définit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.
 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$. En déduire la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice n° 17:

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et est finie. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.
2. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur $[0, +\infty[$.
3. On suppose que $f(0) < 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est strictement positive. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

Exercice n° 18:

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :

$$(a) \ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right)$$

$$(b) \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right)$$

$$(c) \ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(x)} \right)^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x , on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\lambda x)}{e^x - 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ? Justifier.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = 1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) Justifier que la fonction g est continue sur \mathbb{R}^* .

(b) Montrer que, pour tout nombre réel x non nul, on a $1 - |x| \leq g(x) \leq 1 + |x|$.

(c) En déduire que la fonction g est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} .