Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1:
On pose $\mathrm{P} = X^2 + 3X$, $\mathrm{Q} = X^2 + X + 1$ et $\mathrm{R} = X^3 - X$. Calculer P^2, $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$, $3\mathrm{P} + \mathrm{Q} - \mathrm{R}$ et $\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2$.

Exercice n° 2:
Déterminer les coefficients du polynôme produit AB dans les deux cas suivants :

1. $\mathrm{A} = X + 2X^2 + 3X^3$ et $\mathrm{B} = 1 - X + X^2$
2. $\mathrm{A} = X^3 + X^2 + X + 1$ et $\mathrm{B} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$
3. $\mathrm{A} = (1 + X)^n$ et $\mathrm{B} = (1 - X)^n$

Exercice n° 3:
Soit P le polynôme $P(X) = 2X^{10} - 5X^9 + X^6 - X^5 + 2$

1. Déterminer le degré et les coefficients des polynômes P' et P''.
2. Déterminer les degrés des polynômes Q, R et S où $\mathrm{Q}(X) = \mathrm{P}(X^2)$, $\mathrm{R}(X) = P(X)^2$ et $\mathrm{S}(X) = \mathrm{P}^{(7)}(X)$.

Exercice n° 4:
Soient a et b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice n° 5:
Déterminer les racines réelles des polynômes suivants et en déduire une factorisation dans $\mathbb{R}$:

1. $P_1(X) = X^2 + X + 1$
2. $P_2(X) = X^3 - X^2 - 2X$
3. $P_3(X) = X^7 - X$
4. $P_6(X) = X^8 + X^4 + 1$

Exercice n° 6:
Peut on factoriser Q par P dans les exemples suivants ?

1. $P = X - 1$ et $Q = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$
2. $P = X^3 + 1$ et $Q = X^2 - 1$
3. $P = X^4$ et $Q = X^6 + X^5 + X^2$
4. $P = X - 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + X + 1$
5. $P = X + 1$ et $Q = X^3 + 3X^2 - 2$
6. $P = (X + 1)^2$ et $Q = 2X^4 + 5X^3 + 3X^2 - X - 1$
7. $P = X^2$ et $Q = 2X^4 + 5X^3 + 3X^2 - X - 1$
8. $P = X^2 + X$ et $Q = (X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$

Exercice n° 7:
Pour quelles valeurs de a le polynôme $P_a(X) = (X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine réelle multiple ?

Exercice n° 8:
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier le polynôme $\mathrm{R}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k$.

Je me perfectionne !

Exercice n° 9:

1. A l'aide du polynôme $P = (X + 1)^n$ et de son polynôme dérivée, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \leq n, \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
2. A l'aide du polynôme $P = (X + 1)^{2n}$, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
Indication : On utilisera la formule du produit de 2 polynômes et on regardera plus particulièrement le coefficient devant le monôme X^n

Exercice n° 10:

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est polynomiale ? (on justifiera la réponse.)

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Exercice n° 11:

Soit P et Q deux polynômes unitaires de degré 2022 tels que pour tout réel x, $P(x) \neq Q(x)$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $P(x-1) = Q(x+1)$.

Exercice n° 12:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Développer le polynôme

$$\mathrm{P}_n(X) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$$

Indication : on commencera par calculer les premiers polynômes puis on conjecturera une expression que l'on démontrera par récurrence.

Exercice n° 13:

On définit la suite de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0 = 1 \\ \mathrm{P}_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}_{n+2} + \mathrm{P}_n = 2X\mathrm{P}_{n+1} \end{cases}$$

1. Déterminer P_2 et P_3. Déterminer le degré de P_n.
2. Déterminer la parité de P_n. Calculer $\mathrm{P}_n(1)$ et $\mathrm{P}_n(-1)$.

Exercice n° 14:

Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[X]$ et $n = deg(\mathrm{P})$.

1. Montrer que l'on a
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$
2. En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}$ on a,
$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!} (X-a) X^k.$$

Exercice n° 15:

Résoudre les équations d'inconnue $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[X]$

1. $\mathrm{P}(X^2) = (X^2+1)\mathrm{P}(X)$
2. $\mathrm{P}(2X) = \mathrm{P}'(X)\mathrm{P}''(X)$

Exercice n° 16:

Soient $n \in \mathbb{N}$ et P_0, P_1,..., P_n des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(\mathrm{P}_k) = k$. Montrer que

$$\forall (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}_k = 0 \Longrightarrow (\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

Exercice n° 17:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les polynômes

$$\mathrm{A} = (1+X)^n + (1-X)^n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = (1+X)^n - (1-X)^n$$

1. Déterminer les coefficients des polynômes A et B.

2. Calculer A(1) et B(1) puis montrer que

$$\sum_{\substack{0\leq p\leq n \\ p \text{ pair}}} \binom{n}{p} = 2^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{\substack{0\leq p\leq n \\ p \text{ impair}}} \binom{n}{p} = 2^{n-1}$$

3. On définit le polynôme T_n par

$$\mathrm{T}_n(X) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k$$

   Déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

4. En calculant de deux manières différentes le coefficient de X^n dans l'écriture développée du polynôme $(X+1)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$$

   Indication : $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 18:

On appelle polynôme symétrique un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre. Par exemple, $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$ est un polynôme symétrique. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0 \tag{E}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Montrer que si x_0 est solution de (E), alors $\dfrac{1}{x_0}$ est solution de (E).
3. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation

$$x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \tag{E'}$$

4. Calculer $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$.
5. En posant $Y = x + \dfrac{1}{x}$, montrer que l'équation (E') se ramène à une équation du second degré.
6. Résoudre cette équation du second degré, puis en déduire les solutions de l'équation (E).

Polynômes et espaces vectoriels au programme de $2^{\text{ième}}$ année : un micro avant-goût

Exercice n° 19:

On note $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égal à 2. On admet que $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel avec $+$ l'addition entre deux polynômes et $\cdot$ la multiplication d'un polynôme par un réel. On a donc

$$\mathbb{R}_2[X] = \left\{P \text{ polynôme}\,;\ \deg(P) \leqslant 2\right\} = \left\{aX^2 + bX + c\,;\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

1. L'ensemble $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\ P(1) = P(2)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. Si P s'écrit sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, à quelle condition a-t-on $P \in A$?
3. L'ensemble $B = \{P \in \mathbb{R}_2[X]\,;\ XP'(X) = 2P(X)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$?
4. Si P s'écrit sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, à quelle condition a-t-on $P \in B$?