

Je m'échauffe avec les compétences de base!

**Exercice n° 1:**

Déterminer le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions d'expressions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $a(x) = \sin(\ln(x))$                    | 6. $\ell(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ |
| 2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$             | 7. $m(x) = \frac{\tan(x)}{x^2 - 4}$                |
| 3. $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ | 8. $n(x) = \sqrt[5]{x-3}$                          |
| 4. $h(x) =  1 - 3x $                        | 9. $p(x) = \arctan(e^x)$                           |
| 5. $k(x) = e^{2x} \ln(1 - \sqrt[4]{x})$     |  |

**Exercice n° 2:**

Étudier la fonction  $f : x \mapsto x e^{\frac{1}{x}}$  (domaine de définition, de dérivabilité, variations, asymptotes, graphique).

**Exercice n° 3:**

Pour chaque fonction, étudier l'existence d'une réciproque sur l'intervalle proposé. Cette réciproque est-elle dérivable? Si oui, sur quel domaine? Calculer sa dérivée.

1.  $g : x \mapsto \sin(x)$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ;
2.  $h : x \mapsto \cos(x)$  sur  $[0, \pi]$ ;
3.  $k : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$

**Exercice n° 4:**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et  $n$  fois dérivable sur  $[a, b]$ .

1. On suppose qu'il existe  $n + 1$  réels distincts sur  $[a, b]$  tel que  $f$  est égale à une même valeur (où  $n$  est un entier tel que  $n \geq 2$ ). Montrer qu'il existe  $x \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(x) = 0$ .
2. On suppose que  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$ . Démontrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

**Exercice n° 5:**

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$
2. En déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

**Exercice n° 6:**

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$ .
2. Soit  $P$  un polynôme de degré  $d \in \mathbb{N}^*$  et de coefficient dominant égal à 1.  
Montrer que  $P(n+1) - P(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} dn^{d-1}$ .

**Exercice n° 7:**

On considère la fonction  $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < f(x) - f(x+1) < \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ .
2. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$ .

**Exercice n° 8:**

Pour tout entier naturel  $n$ , donner l'expression de la dérivée  $n$ -ième des fonctions suivantes :

1.  $g(x) = \sin(ax)$ ;
2.  $h(x) = 3 + 2 \sin(x) \cos(x)$ ;

3.  $j(x) = \frac{1}{x^2-1}$  (conseil : trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $j(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ )
4.  $k(x) = x^2 e^x$  (conseil : calculer les premières dérivées et conjecturer une formule que l'on démontrera par récurrence)

**Je me perfectionne!**

**Exercice n° 9:**

1. Soit  $f : x \mapsto \arctan(x) + 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$ . Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer  $f'$ . En déduire une expression plus simple de  $f$ .
2. Procéder de même avec  $h(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$  (on remarquera notamment que cette fonction est impaire).

**Exercice n° 10:**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}_+$  et la relation de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que tous les termes de la suite sont positifs.
2. Montrer que  $f$  admet un point fixe sur  $\mathbb{R}_+$ . On le notera  $\alpha$ .
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ .
4. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .
5. En déduire que  $(u_n)$  converge et donner sa limite.

**Exercice n° 11:**

Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $g : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^4 + x + f(x) \end{cases}$ . On suppose que  $f$  s'annule en  $-1, 0$  et en  $1$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]-1, 1[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

**Exercice n° 12:**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_-$  et sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

4. En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et préciser la valeur de  $f^{(n)}(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice n° 13:**

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ .

1. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction  $x \mapsto x^\alpha$ , montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

2. On considère la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  de terme général

$$h_n = \frac{1}{1^{1-\alpha}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}} + \frac{1}{3^{1-\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\alpha}}$$

Montrer qu'il existe un nombre réel  $C > 0$  tel que  $h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^\alpha$ .

3. Montrer que si  $\alpha < 0$ , alors la suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème!

#### Exercice n° 14:

Dans ce problème, on considère la fonction *tangente hyperbolique*, notée  $\text{th}$  définie par

$$\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

### Partie A : étude de la fonction tangente hyperbolique

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $\text{th}$ .
2. Étudier la parité de  $\text{th}$  sur cet ensemble.
3. Déterminer les limites de la fonction  $\text{th}$  aux bornes de son domaine de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction  $\text{th}$  ?
4. Montrer que  $\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .
5. Justifier que  $\text{th}$  est dérivable sur son domaine de définition et calculer sa dérivée. Montrer notamment que  $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$ .

### Partie B : étude de l'application réciproque

1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $\text{th}$ .
2. Montrer que  $\text{th}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  à préciser. Dans la suite, on note  $\text{Argth}$  la réciproque de la fonction  $\text{th}$  (on l'appelle fonction *argument tangente hyperbolique*).
3. Que peut-on dire de l'application réciproque  $\text{Argth}$  ? Tracer notamment son tableau de variation sans calcul supplémentaire.
4. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions  $\text{th}$  et  $\text{Argth}$ .
5. Déterminer l'expression de  $\text{Argth}$  (*Rappel* : si  $f$  est une fonction définie de  $J$  dans  $I$  alors pour déterminer la fonction réciproque de  $f$ , on résout dans  $J$  l'équation  $f(x) = y$  où  $y \in I$ ).
6. Calculer la dérivée de  $\text{Argth}$ .

### Partie C : utilisation de la fonction tangente hyperbolique pour *lisser*

Lorsqu'on étudie une fonction modélisant les changements de phase d'un matériau, il n'est pas rare d'obtenir des expressions différentes suivant le domaine étudié. Les fonctions peuvent ainsi ne pas être continues ou dérivables au niveau des valeurs seuils (correspondant à un changement de phase du matériau). La fonction tangente hyperbolique peut alors permettre de « lisser » la courbe représentative de la fonction en glissant progressivement de la courbe du premier domaine à celle du second domaine, en conservant la continuité et la dérivabilité.

Le procédé de raccord est le suivant. Si on appelle  $x_s$  la valeur seuil (abscisse correspondant à un changement de phase du matériau) et si on suppose que l'expérimentation donne pour l'étude du changement de phase une fonction du type :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq x_s \\ f_2(x) & \text{si } x > x_s \end{cases}$$

alors, si  $f$  n'est pas continue ou pas dérivable en  $x_s$ , on peut la remplacer par la fonction lisse  $g$  définie par :

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) \times f_1(x) & \text{si } x \leq x_s \\ g_2(x) \times f_2(x) & \text{si } x > x_s \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} g_1(x) = \text{th} \left( \frac{x_s - x}{\lambda} \right) \\ g_2(x) = \text{th} \left( \frac{x - x_s}{\lambda} \right) \end{cases}$$

avec  $\lambda$  un paramètre permettant de définir la largeur de la zone de raccord. Nous considérerons ici la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\cos(x)} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sin(\pi x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. La fonction  $f$  est-elle dérivable à droite en 0? A gauche en 0? La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0?
3. Déterminer la fonction  $g$  associée à  $f$  (par la méthode précédemment décrite) pour le choix  $\lambda = \frac{1}{3}$ .
4. La fonction  $g$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ? Dérivable sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier.
5. Les deux graphiques suivants représentent la fonction  $g$  associée à  $f$  pour les paramètres  $\lambda = 3$  et  $\lambda = \frac{1}{3}$ . Associer chacun des graphes avec la valeur de  $\lambda$  correspondante en justifiant.

