

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

Déterminer une primitive des fonctions suivantes après avoir donné leur domaine de continuité :

1. $f_1(t) = 2t(t^2 + 1)^5$
2. $f_2(t) = \frac{\ln(t)}{t}$
3. $f_3(x) = x^2 \sin(x^3)$
4. $f_4(z) = z(z^2 - 1)^4$
5. $f_5(x) = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{x^2 - 3x + 2}$
6. $f_6(x) = 4x\sqrt{2 - x^2}$
7. $f_7(t) = \sin(2t)e^{3\cos(2t)}$
8. $f_8(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{4})$
9. $f_9(x) = \cos(x)^4$ (penser à linéariser)
10. $f_{10}(x) = \frac{e^x}{1 + (e^x)^2}$

Exercice n° 2: Déterminer la primitive des fonctions suivantes s'annulant au point indiqué.

1. Primitive de $f(x) = \frac{x}{(x^2+3)^5}$ s'annulant en 1.
2. Primitive de $g(x) = \tan(x)$ s'annulant en $\frac{\pi}{4}$.
3. Primitive de $h(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ s'annulant en e .

Exercice n° 3: Calculer les intégrales suivantes en utilisant des intégrations par parties

$$I_1 = \int_1^e \ln(t) dt \qquad I_2 = \int_0^1 (x+1)e^x dx \qquad I_3 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{(\cos(x))^2} dx \qquad I_5 = \int_0^1 \arctan(x) dx \qquad I_6 = \int_0^2 \ln(1+x^2) dx$$

Exercice n° 4: Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos(t)} dt \qquad I_2 = \int_0^n x|x| dx \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad I_3 = \int_0^\pi \sin(t)^2 \cos(t)^2 dt$$

$$I_4 = \int_0^2 2^{5x} e^{2x} dx \qquad I_5 = \int_0^2 |x^3 + x - 2| dx \qquad I_6 = \int_0^1 \min(x^2, 1 - x^2) dx$$

Exercice n° 5: Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

1. $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^2 \cos(t)^3 dt$ en posant $x = \sin(t)$
2. $I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \cos(x)^2} dx$ en posant $u = \tan(x)$
3. $I_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)^3}{\cos(x)^2} dx$ en posant $u = \cos(x)$
4. $I_4 = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$ en posant $z = e^x$
5. $I_5 = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx$ en posant $u = \ln(x)$
6. $I_6 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)^2 + 2\cos(x)^2} dx$ en posant $r = \cos(x)$

Exercice n° 6:

En utilisant des sommes de Riemann, déterminer la limite suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{3k\pi}{n}\right)$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$
4. Soit $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha$
5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right)$
7. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice n° 7:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur \mathbb{R} ;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur \mathbb{R} ;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;
6. $y' + x^2y = -x^2$ sur \mathbb{R} ;
7. $2xy' - y = x$ sur \mathbb{R}_+^* ;
8. $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$ sur \mathbb{R} .

Je me perfectionne!

Exercice n° 8:

Déterminer un équivalent des suites suivantes :

1. $s_n = \sum_{k=1}^n ((n+k)^3 - (n-k)^3)$;
2. $t_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k}$.
3. $u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$
4. $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}$

Exercice n° 9:

1. Trouver des constantes a, b et c réelles telles que

$$\forall v \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \frac{2v^2}{v^2-1} = a + \frac{b}{v+1} + \frac{c}{v-1}$$

2. En déduire à l'aide du changement de variable $t = v^2 - 2$ la valeur de $I = \int_2^7 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t} dt$.
3. Suivre la même démarche pour calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$ en posant $t = \ln(x)$.

Exercice n° 10:

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Établir à l'aide d'une intégration par parties que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}$$

4. En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

Exercice n° 11:

On considère la suite (I_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. Calculer I_0 et I_1 .

2. Prouver que (I_n) est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

3. En déduire que (I_n) converge et préciser sa limite.

4. Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$

5. En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$.

Exercice n° 12:

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Justifier que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer leur dérivée.

1. $u(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t) dt$

2. $v(x) = \int_0^x x f(t) dt$

3. $w(x) = \int_0^x f(t+x) dt$

Exercice n° 13:

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Montrer que si $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$ alors f admet un point fixe (c'est à dire un point c tel que $f(c) = c$).

Exercice n° 14:

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(t) \cos(nt) dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_a^b f'(t) \sin(nt) dt$. Montrer que la suite (J_n) est bornée

2. En déduire que (I_n) converge et déterminer sa limite

3. En s'inspirant des questions précédentes déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de concours sur ce thème!

Exercice n° 15:

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\arctan(t)}{t} dt$.

1. Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et déterminer la fonction F' sur \mathbb{R}^* .
2. Montrer que F est impaire.
3. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \ln(2) \arctan(x) \leq F(x) \leq \ln(2) \arctan(2x)$$
4. Montrer qu'on peut prolonger les fonctions F et F' par continuité en 0.
5. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
6. Étudier les variations de F sur \mathbb{R} et tracer F .

Exercice n° 16:

On considère la fonction $G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de G .
2. Montrer que G est paire.
3. Montrer que G est dérivable sur son domaine de définition et préciser G' .
4. À l'aide du théorème des gendarmes, déterminer la limite de G en $+\infty$.

Exercice n° 17: Extrait Agro-Veto 2010

On veut déterminer les fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f(t) dt + e^x$$

1. On suppose l'existence d'une application f continue sur \mathbb{R} vérifiant l'équation proposée.
 - (a) Calculer $f(0)$.
 - (b) Justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} et exprimer pour tout réel x , $f'(x)$ en fonction de x , f et e^x .
 - (c) En déduire la fonction f .

(On pourra chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha x e^x$ où α est un réel à déterminer).
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbb{R} telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x f(t) dt + e^x$$