Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1:
On considère les points $A(1,-2)$ et $B(3,1)$ et les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la droite D_1 passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite D_2 passant par B et de vecteur normal $\vec{v}$.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite D_3 passant par les points A et B.
4. Déterminer l'équation cartésienne de la droite D_4 qui admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$
5. Déterminer l'équation cartésienne de la droite D_5 parallèle à D_3 et passant par le point $C(2,2)$.

Exercice n° 2:
Déterminer une représentation paramétrique des droites suivantes :

1. la droite D_1 d'équation cartésienne $x + y - 2 = 0$;
2. la droite D_2 d'équation cartésienne $x - 3 = 0$;
3. la droite D_3 passant par les points $A(1,2)$ et $B(-1,1)$.

Exercice n° 3: intersection de droites dans le plan
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intersection des droites D et D' :

1. D et D' admettent respectivement $2x + 3y - 2 = 0$ et $3x - y + 4 = 0$ pour équations cartésiennes ;
2. la droite D passe par les points $A(1,-1)$ et $B(3,1)$ et la droite D' passe par les points $C(4,-4)$ et $E(8,0)$;
3. la droite D admet comme représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 - t \end{cases}$ et la droite D' est parallèle à la droite d'équation cartésienne $2x + 6y - 1 = 0$ et passe par l'origine ;
4. la droite D passe par les points $A(-1,3)$ et $B(1,9)$ et la droite D' passe par $C(-4,-6)$ et $E(0,6)$;
5. la droite D passe par $F(1,1)$ et admet $\vec{n} = 3\vec{i} - \vec{j}$ pour vecteur normal, D' admet $-2x + 3y + 2 = 0$ pour équation cartésienne.

Exercice n° 4:
Soit $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0\}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n° 5:
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{C}_a$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2 + y^2 + 2ax + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_a$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
2. Montrer que tous les cercles $\mathcal{C}_a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ passent par un même point A dont on précisera les coordonnées.

Exercice n° 6:
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle, puis donner son centre et son rayon.
2. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par le point $A(-1,0)$.

Exercice n° 7:
Soient $A(2,0)$ et $B(-1,4)$. Déterminer selon les valeurs de k l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$.

Exercice n° 8:
Soient deux points du plan A et B distincts. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$.

Exercice n° 9:

On considère les points $A(3,2)$, $B(-1,1)$ et $C(1,5)$ du plan.

1. Vérifier que le triangle ABC n'est pas aplati.
2. Déterminer les équations cartésiennes des droites (AB), (AC) et (BC).
3. Déterminer le centre de gravité G du triangle ABC.
4. Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
5. Déterminer l'orthocentre H du triangle ABC.
6. Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice intérieure issue de A.

Exercice n° 10:

Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne et un système d'équations paramétriques du plan P :

1. P passe par $A(1;-1;2)$ et est dirigé par les vecteurs $\vec{u} = (2,0,1)$ et $\vec{v} = (2;1;0)$;
2. P passe par les trois points $A(-1;1;1)$, $B(1;-1;1)$ et $C(1;1;-1)$;
3. P passe par $A(1;1;1)$ et admet $\vec{n}(2;-1;-1)$ pour vecteur normal.

Exercice n° 11:

Dans chacun des cas suivants, donner un système d'équations paramétriques de la droite étudiée :

1. la droite D_1 passant par $A(1;2;3)$ et $B(-1;0;2)$;
2. la droite D_2 passant par $A(-1;1;2)$ dirige par $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$;
3. la droite D_3 définie par les équations cartésiennes $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & - & z & - & 4 & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & 6 & = & 0 \end{array} \right.$

Exercice n° 12:

Dans chacun des cas suivants, donner un système d'équations cartésiennes de la droite étudiée :

1. $M(x;y;z) \in D \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & - & t \\ z & = & -1 & + & 2t \end{array} \right.$;
2. la droite D passant par $A(1;0;1)$ et perpendiculaire au plan d'équation cartésienne $2x - y + z = 1$.

Exercice n° 13:

On considère les quatre points $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$, $C(-1;2;0)$ et $D(0;-3;1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan P dont on donnera une équation cartésienne.
2. Donner les équations paramétriques de la droite passant par D et orthogonale au plan P.
3. Déterminer les coordonnées du point D' symétrique de D par rapport à P.

Exercice n° 14:

ABC est un triangle équilatéral, et I est le milieu de $[BC]$, H est le projeté orthogonal de I sur $[AB]$.

1. Montrer que H est le barycentre de $(A,1)$, $(B,3)$
2. Montrer que le barycentre de $(A,1)$, $(B,5)$, $(C,2)$ est le milieu de $[IH]$

Exercice n° 15:

1. Soit deux droites (d) et (d') du plan définies par $(d) : x + 3y - 4 = 0$ et $(d') : x + y = 0$. Déterminer $d \cap d'$.
2. Soit une droite (d) et un cercle $(\mathcal{C})$ du plan définis par $(d) : x + 3y - 4 = 0$ et $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0$. Trouver $d \cap \mathcal{C}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites de l'espace définies par les systèmes suivants :

$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} x + y + \lambda & = & 0 \\ y + z + 1 & = & 0 \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} x + 2y + z & = & 0 \\ 3x + y + 2\lambda & = & -2 \end{array} \right.$$

Déterminer λ pour que les droites D_1 et D_2 soient sécantes.

Je me perfectionne !

Exercice n° 16:

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon r et M un point du plan extérieur à $\mathcal{C}$. On considère une droite D passant par M et coupant $\mathcal{C}$ en deux points distincts A et B.

1. Soit A' le point diamétralement opposé à A.
   Montrer que
   $$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \Omega M^2 - r^2$$
   En déduire que le nombre réel $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de la droite D choisie. On appelle ce nombre puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ et on le note $\mathcal{C}(M)$.
2. Soient T et T' les deux points de contact des deux tangentes $\mathcal{C}$ issues de M.
   Montrer que $MT^2 = MT'^2 = \mathcal{C}(M)$.
3. On munit le plan du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$, de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r puis montrer que pour tout point $M(x_M; y_M)$ extérieur au cercle $\mathcal{C}$, on a
   $$\mathcal{C}(M) = x_M^2 + y_M^2 - 2ax_M - 2by_M + c$$
   où c est un nombre réel que l'on déterminera.

Exercice n° 17:

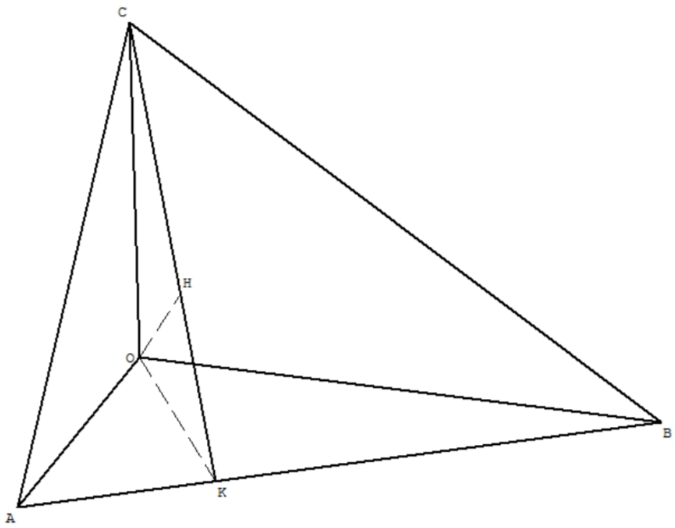
Le but de l'exercice est de déterminer la perpendiculaire commune de deux droites dans l'espace.

- D_1 est la droite passant par $A(1; -1; 2)$ dirige par $\vec{u_1} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$;
- D_2 est la droite d'équation cartésienne $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$

1. (a) Vérifier que les droites D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.
   (b) Donner un vecteur directeur $\vec{u_2}$ de D_2 et en déduire que ces droites ne sont pas parallèles.
2. On suppose qu'il existe une droite perpendiculaire à D_1 et D_2. Soit Δ une telle droite.
   (a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{U}$ de Δ.
   (b) Soit P_1 le plan contenant D_1 et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{U}$. Montrer que la droite Δ est contenue dans le plan P_1.
   (c) Que peut-on dire du plan P_2 contenant D_2 et dirigé par les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{U}$?
3. (a) Déterminer les équations cartésiennes des plan P_1 et P_2.
   (b) Donner des équations paramétriques de Δ et déterminer les points d'intersection de Δ avec D_1 et D_2.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de DS sur ce thème !

Exercice n° 18:
On considère un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace $\mathcal{E}$. Soient $A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,2)$ trois points de l'espace. On dit que $OABC$ est un tétraèdre trirectangle.



1. (a) Donner un vecteur directeur des droites (OA), (OB), (OC), (AB), (AC) et (BC).
   (b) Justifier que les arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
   (b) Écrire une fonction `python` qui prend en entrée trois nombres x, y et z et qui détermine si le point de l'espace de coordonnées (x, y, z) appartient au plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par O.
   (d) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H du point O sur le plan (ABC).
   (e) Justifier que le plan (OCH) est perpendiculaire à la droite (AB).
   (f) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (CH) et (AB).
   (g) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
   On rappelle que l'orthocentre d'un triangle est le point de concours de ses hauteurs.
3. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C.
   (a) Déterminer les coordonnées de G.
   (b) Déterminer les coordonnées du point S symétrique du point O par rapport à G.
   (c) Montrer que S est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $OABC$.