

Je m'échauffe avec les compétences de base!

Exercice n° 1:

Déterminer les développements limités indiqués :

1. DL₃(0) de $f(x) = \ln(1+x) - e^x$;
2. DL₂(0) de $f(x) = e^x \times \sqrt{1+x}$
3. DL₃(0) de $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$
4. DL₃(0) de $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$;
5. DL₃(0) de $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$;
6. DL₂(0) de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$;
7. DL₃(1) de $f(x) = \cos(\ln(x))$;

Exercice n° 2:

À l'aide de développements limités, calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{\ln(1+x^3)}$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$.

Exercice n° 3:

1. Déterminer les développements limités indiqués :

- (a) DL₂(a) de $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $a = 1$;
- (b) DL₂(a) de $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$ avec $a = 1$;
- (c) DL₃(a) de $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ avec $a = 1$;
- (d) DL₃(a) de $f(x) = \sin(x)$ avec $a = \frac{\pi}{4}$.

2. Pour chacune des fonctions précédentes donner l'équation de la tangente en $x = a$.

Exercice n° 4:

En considérant les dérivées des fonctions, déterminer les développements limités indiqués :

1. DL₃(0) de $f(x) = \arctan(x)$;
2. DL₃(0) de $f(x) = \arctan(e^{2x})$;

Exercice n° 5:

1. Déterminer le développement asymptotique avec 1 terme de $f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$;
2. On considère la fonction f d'expression $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$.
 - (a) Déterminer le domaine de définition de f ainsi que les limites aux bornes de ce domaine.
 - (b) Déterminer le développement asymptotique avec 1 terme de $f(x)$ aux bornes du domaines
3. Déterminer le développement asymptotique à 2 termes de $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$;

Je me perfectionne!

Exercice n° 6:

Déterminer les développements limités indiqués :

1. DL₄(0) de $f(x) = \ln(1 + \cos(2x))$;
2. DL₃(0) de $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$;
3. DL₂(0) de $f(x) = e^{\cos(\sqrt{x})}$;
4. DL₂(0) de $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(3x)}$;
5. DL₃(0) de $f(x) = \sqrt{1 + 3 \cos(4x)}$.

Exercice n° 7:

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

1. Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
2. Déterminer la position de \mathcal{C} par rapport à sa tangente au voisinage de 1.

Exercice n° 8:

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle continue en 0.
2. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle dérivable en 0
3. Pour quelles valeurs de a et b la fonction f est-elle $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice n° 9:

Démontrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ peut-être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice n° 10:

Déterminer les développements asymptotiques suivants :

1. à 2 termes de $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$;
2. à 3 termes de $\varphi(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

Exercice n° 11:

À l'aide d'un développement limité, montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-2}}{1+\ln x}$ admet un maximum local en $x = 1$ (c'est-à-dire que, dans un voisinage de 1, la fonction f admet un maximum en 1).

Exercice n° 12:

Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) + x$.

1. Déterminer un $DL_3(0)$ de $f(x)$.
2. Prouver que f admet une réciproque sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Justifier que f^{-1} admet un $DL_3(0)$ et le déterminer.

Exercice n° 13:

Reprendre les questions de l'exercice précédent avec les fonctions g et h d'expressions :

1. $g(x) = e^x + x - 1$;
2. $h(x) = \arctan(\ln(1+x))$.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de concours sur ce thème !

Exercice n° 14:

[EDHEC 2009] On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $] -\infty, 1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, puis celui de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.
(b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
3. (a) Justifier que f est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$.
(b) Soit h la fonction définie sur $] -\infty, 1[$ par $h(x) = \ln(1-x) + x$. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $] -\infty, 1[$ puis son tableau de signes.
(c) En déduire les variations de f .

- (d) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations.
4. (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel dans l'intervalle $[0, 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .
- (b) Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle converge.
- (c) Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.