Je m'échauffe avec les compétences de base !

Exercice n° 1:

Dans chacun des cas, après avoir vérifié que les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à déterminer, calculer leur dérivées partielles.

1. $f(x,y) = xy^2 + yx^3$
2. $g(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$
3. $k(x,t) = x^2 \arctan(xt)$
4. $m(x,y) = x^y$
5. $n(x,y) = \sqrt{x-y^2}$
6. $h(r,\theta) = \dfrac{\sqrt{r}\cos(\theta)}{1+r^2}$

Exercice n° 2:

Soit $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$.
Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ensemble à déterminer puis calculer ses dérivées partielles d'ordre 2. Que remarque-t-on ?

Exercice n° 3:

Dans chacun des cas, calculer en utilisant les propriétés de la dérivation des fonctions composées la dérivée de la fonction g.

1. $f(x,y) = e^{x-2y}$ et $g(t) = f(\sin(t), t^3)$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ et $g(t) = f(e^t, \sin(t))$

Exercice n° 4:

soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2y - xy^2$.

1. Déterminer les points (x,y) tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
2. En considérant $f(x,2x)$, montrer que f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$.
3. La nullité des dérivées partielles en un point est-elle une condition suffisante ou une condition nécessaire pour que la fonction f admette un extremum en ce point ?

Exercice n° 5:

Soit $f(x,y) = x^2y - 3y$ et soit $A(4,3)$.

1. Calculer les dérivées partielles par rapport aux deux variables au point A.
2. En déduire une approximation des petites variations de f autour du point A.
3. Calculer $f(4,1;2,9)$ de deux façons :
   — En utilisant l'approximation ci dessus.
   — Avec la formule exacte. Comparer.
4. Reprendre les calculs pour évaluer $f(4,7;2,4)$. Commentaires.

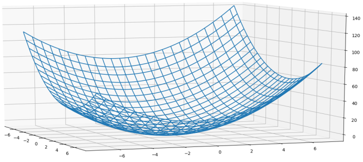
Exercice n° 6:

Dans chacun des cas suivants, écrire l'équation du plan tangent à la surface représentative de la fonction f, au point indiqué, puis en déduire la valeur approchée demandée.

1. $f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$ en $(1,1)$. Trouver une valeur approchée de $f(1,1;0,9)$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x+3y}{y-3x}$ en $(2,4)$. Trouver une valeur approchée de $f(2,1;3,9)$.

Exercice n° 7:

Soit $f(x,y)=x^2+y^2-4x+2y$ et soit (S) la surface représentant cette fonction, c'est à dire l'ensemble des points (x,y,z) tels que $z=f(x,y)$.



1. Calculer $f(0,0), f(-1,0), f(1,1), f(2,-1)$
2. Déterminer trois réels x_0, y_0 et a tels que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+a$. En déduire le minimum de f.
3. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les projections de l'intersection de (S) et des plans $z=4$ et $z=-4$.
4. Quelle est la section de (S) par le plan d'équation $y=0$?

Je me perfectionne !

Exercice n° 8:

Un point critique est un point où les deux dérivées partielles s'annulent. Pour les fonctions suivantes, déterminer les points critiques si ils existent.

1. $f(x,y)=x\sin(y)$
2. $g(x,y)=3x^3y-2xy-4$
3. $h(x,y)=ye^{-x^2-y^2}$

Exercice n° 9:

Dans chacun des cas suivants, préciser les fonctions f satisfaisant aux conditions données.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0.$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^y.$
4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^x.$
5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3f(x,y).$
6. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=xy.$
7. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{x}{y}+1.$
8. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(y).$

Exercice n° 10:

Les population $x(t)$ et $y(t)$ des proies et des prédateurs vérifient le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax-bxy \\ y' & = & -cy+dxy \end{array}\right.$$

où a,b,c,d sont des constantes positives.
Soit H la fonction définie par $H(x,y)=a\ln(y)-by+c\ln(x)-dx$.

1. Rappeler l'expression de la dérivée de la fonction $t\mapsto H(x(t),y(t))$ en fonction des dérivées partielles de H.
2. En déduire que la valeur de $H(x(t),y(t))$ reste constante au cours du temps.

Maintenant que je suis fort(e), voici des extraits de concours sur ce thème !

Exercice n° 11: Extrait Agro Veto 2016

Cette épreuve s'intéresse à la modélisation de phénomènes de transport, omniprésents dans notre vie : trafic routier, déplacement de lymphocytes dans le sang, invasions d'espèces...

On considère l'équation dite de *transport* suivante, posée en une dimension spatiale et en temps positifs :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

La constante $c \in \mathbb{R}_+$ est appelée vitesse. La fonction inconnue u dépend du temps t et de la position dans l'espace x.

On admettra dans la suite que l'équation (1) admet des solutions définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

On considère la fonction u_0 définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

On définit alors la fonction u de la manière suivante :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, u(t,x) = u_0(x - ct)$$

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ de la fonction u en fonction de u_0'.
2. Montrer que u est solution de (1).
3. Que vaut $u(0,x)$? Justifier le nom de "condition initiale" donnée à la fonction u_0.
4. Dans cette question, on choisit la donnée initiale suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan(x)$$

et on fixe $c = 1$.

Tracer dans un même repère $u_0(x), u(1,x)$ et $u(2,x)$ en fonction de x (échelle : 1 unité = 5cm). Justifier au vu de ce tracé le nom *d'équation de transport* donné à cette équation.

Exercice n° 12: Extrait G2E 2005

On considère le système différentiel (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} x' &= y^2 \\ y' &= \sin(x) \end{cases}$$

où les inconnues sont deux fonctions dérivables x et y.

1. Déterminer les solutions constantes de (S).
2. Soit V une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
   (a) Donner une condition concernant $\dfrac{\partial V}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ sous laquelle la fonction $\phi : t \mapsto V(x(t), y(t))$ est constante pour toute solution (x,y) de (S).
   (b) Vérifier que la fonction $V(x,y) = \cos(x) + \dfrac{y^3}{3}$ satisfait la condition précédente.
3. On considère l'unique solution (x,y) de (S) qui vérifie $x(0) = 0$ et $y(0) = -\sqrt[3]{6}$.
   (a) Quelle relation existe-t-il entre x et y ?
   (b) Exprimer y en fonction de x puis tracer le graphe correspondant.