

CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ 8

Ex 1.

1. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

De plus $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, donc : \sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La réciproque de cette fonction sera notée A .

Remarque : d'habitude on l'appelle arcsinus, ou encore Arcsin.

2. On sait que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $A(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

On sait que $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc : $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$.

Remarque : pour cette question et pour de nombreuses autres, le tracé d'un cercle trigonométrique au brouillon aide énormément.

3. Soit x dans $[-1, 1]$. On sait que : $\cos^2(A(x)) + \sin^2(A(x)) = 1$.

Et par définition $\sin(A(x)) = x$. Donc $\cos^2(A(x)) = 1 - x^2$.

Ainsi $|\cos(A(x))| = \sqrt{1 - x^2}$.

Enfin, $A(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif. Donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

4. La fonction $f = \sin$ est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) = \cos(x)$, donc f' ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (*bien noter les bornes exclues*). Ainsi

$$A = f^{-1} \text{ est dérivable sur } f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[.$$

Toujours d'après le cours d'analyse de sup, $A' = \frac{1}{f' \circ A}$, donc :

$$\forall t \in]-1, 1[, A'(t) = \frac{1}{\cos(A(t))} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

La dernière égalité est obtenue grâce à la question 4.

Remarque : lorsque t se rapproche des bornes -1 et 1 , $A'(t)$ tend vers $+\infty$, ce qui est une nouvelle justification des demi-tangentes verticales sur la courbe de A qui avaient été obtenues par symétrie avec les tangentes horizontales de sinus. Mais bien sûr l'objet du sujet n'était pas ici de s'attarder sur ces détails.

Exercice 2.

Partie A : Etude de la fonction f

1. $x \mapsto \frac{1}{x + \pi}$ est continue sur $]-\infty; -\pi[$ comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas et est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

$x \mapsto \text{Arctan } x + \frac{\pi}{2}$ est continue sur \mathbb{R} et donc sur \mathbb{R}_+^* .

Donc par composition, $x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{x + \pi}\right) + \frac{\pi}{2}$ est continue sur $]-\infty; -\pi[$.

$x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $]-\pi; 0[$ et à valeurs dans $]-1; 0[$. $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $]-1; 0[$. Donc par composition,

$x \mapsto e^{\sin(x)} - 1$ est continue sur $]-\pi; 0[$. Enfin, $\frac{e^{\sin(x)} - 1}{x}$ est continue sur $]-\pi; 0[$ comme quotient avec une fonction polynomiale qui ne s'annule pas.

$x \mapsto x^5 + x + 1$ est continue sur \mathbb{R}_+^* comme fonction polynomiale.

Étudions la continuité en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 + x + 1 = 1 = f(0).$$

De plus, $\frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} 1$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-\pi\}$.

2. f est dérivable sur $] - \infty; -\pi[$.

$$\text{Pour tout } x \in] - \infty; -\pi[, f'(x) = \frac{-\frac{1}{(x+\pi)^2}}{1 + \left(\frac{1}{x+\pi}\right)^2} = \frac{-1}{(x+\pi)^2 + 1} > 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $] - \infty; -\pi[$.

3. f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-\pi\}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{1}{x+\pi} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan } x = -\frac{\pi}{2}$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} \text{Arctan} \left(\frac{1}{x+\pi} \right) = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = 0$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} = \frac{1-1}{-\pi} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} \sin(x) = 0$.

Donc f est prolongeable par continuité en $-\pi$ en posant $f(-\pi) = 0$.

Partie B : Une suite implicite

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$. Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . Comme elle est aussi continue, d'après le théorème de la bijection elle réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur $f(\mathbb{R}_+^*) = [1; +\infty[$. Donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n sur \mathbb{R}_+^* .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$. Comme f est strictement croissante, cela équivaut à $x_n < x_{n+1}$. Donc (x_n) est strictement croissante.
- Supposons par l'absurde que (x_n) converge vers un réel positif ℓ (car $x_n \geq 0$). Alors comme f est continue sur \mathbb{R}_+^* , alors $f(x_n)$ converge vers un réel $f(\ell)$. Or, $f(x_n) = n$ et n diverge vers $+\infty$, ce qui est absurde donc (x_n) n'est pas convergente.
D'après le théorème de la limite monotone, si une suite croissante ne converge pas, alors elle diverge vers $+\infty$.

Problème 1.

Partie A

- | | | | |
|----|--|----|--|
| 1. | <pre>def sommeT(M): S=0 for i in range(len(M)): for j in range(len(M[0])): S=S+M[i,j] return S</pre> | 2. | <pre>def SommecolonneT(n): L=[] for j in range(len(M[0])): S=0 for i in range(len(M)): S=S+M[i,j] L.append(S) return L</pre> |
|----|--|----|--|

- La fonction dot du module numpy permet de faire le produit matriciel.
- Pour définir le tableau M , on utilise la fonction array du module numpy. $M = \text{array}([[1,-1,-1], [-1,1,-1], [-1,-1,1]])$

Partie B

- Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $MX = \begin{pmatrix} x - y - z \\ -x + y - z \\ -x - y + z \end{pmatrix}$

$$\text{Ainsi } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x - y - z, -x + y - z, -x - y + z) \end{cases}$$

- f est un endomorphisme. Ce sera un automorphisme s'il est bijectif. C'est à dire si sa matrice est inversible. Dans ce cas la matrice de f^{-1} sera l'inverse de M .

$$\text{Posons } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
MX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = a \\ -x + y - z = b \\ -x - y + z = c \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = a \\ -2z = a + b \\ -2y = a + c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + y + z = \frac{-1}{2}(b + c) \\ y = \frac{-1}{2}(a + c) \\ z = \frac{-1}{2}(a + b) \end{cases}
\end{aligned}$$

On constate qu'il s'agit d'un système de Cramer donc M est inversible et f est bien un automorphisme

On obtient :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) Déterminons le rang de la famille de vecteurs proposés.

$$\begin{aligned}
Rg(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= Rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= Rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \\
&= Rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1
\end{aligned}$$

Ainsi $Rg(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 3$ (nombre de vecteurs) donc \mathcal{B}' est une famille libre. De plus $Rg(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc \mathcal{B}' est génératrice de \mathbb{R}^3 . \mathcal{B}' donc une base de \mathbb{R}^3

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}
f(\varepsilon_1) &= (-1, -1, -1) = -\varepsilon_1 \\
f(\varepsilon_2) &= (2, -2, 0) = 2\varepsilon_2 \\
f(\varepsilon_3) &= (2, 2, -4) = 2\varepsilon_3
\end{aligned}$$

On obtient $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

On constate que la matrice N est diagonale.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, N^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Partie C

1. On a $h = g \circ f^{-1}$ soit matriciellement $H = G \times M^{-1}$

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $Rg(h) = Rg(H) = 3$ (il suffit de changer l'ordre des lignes pour que la matrice soit échelonnée)

On en déduit que $Rg(h) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc h est bijective

3. On constate que $H \times M = G$ et $M \times H = G$

On en déduit donc que $h \circ f = f \circ h = g$

4. Là encore il vaut mieux travailler matriciellement et vérifier que $H \times H \times H = I_3$

$$H \times H \times H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H \times H \times H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\text{Ainsi } \boxed{h \circ h \circ h = Id_3}$$

Partie D

1. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \vec{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= \varphi(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (-(y + \lambda y') + (z + \lambda z'), (x + \lambda x') - (z + \lambda z'), -(x + \lambda x') + (y + \lambda y')) \\ &= \lambda(-y + z, x - z, -x + y) + \mu(-y' + z', x' - z', -x' + y') \\ &= \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v}) \end{aligned}$$

Ainsi φ conserve les combinaisons linéaires et a même ensemble de départ et d'arrivée \mathbb{R}^3 .

Il s'agit bien d'un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$$

2. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$\varphi(\vec{e}_1) = \varphi(1, 0, 0) = (0, 1, -1) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\varphi(\vec{e}_2) = \varphi(0, 1, 0) = (-1, 0, 1) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$\varphi(\vec{e}_3) = \varphi(0, 0, 1) = (1, -1, 0) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$\text{On en déduit } \boxed{A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. On constate que $A = G + I_3$ donc on en déduit $\varphi = g + Id_3$

4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{(a, a, a) | a \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 1, 1))$

Le vecteur $(1, 1, 1)$ est non nul donc la famille $((1, 1, 1))$ est libre.

Comme il est aussi générateur de $\text{Ker}(\varphi)$, il s'agit d'une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

Ainsi $\boxed{\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1}$ et φ n'est pas injective et donc pas surjective non plus puisqu'il s'agit d'un endomorphisme.

5. $\text{Im}(\varphi) = \text{vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$

$$= \text{vect}((0, 1, -1), (-1, 0, 1), (1, -1, 0))$$

$$\text{Or } (1, -1, 0) = -(0, 1, -1) - (-1, 0, 1)$$

$$\text{Donc } \text{Im}(\varphi) = \text{vect}((0, 1, -1), (-1, 0, 1)).$$

Ainsi les deux vecteurs $(0, 1, -1)$ et $(-1, 0, 1)$ forment une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$. De plus ils forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires donc c'est une base de $\text{Im}(\varphi)$.

$$\text{On en déduit } \boxed{\dim(\text{Im}(\varphi)) = \text{Rg}(\varphi) = 2}$$