

TD28 – Correction

Exercice 1:

- $f(x) = -1 - x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$
- $f(x) = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o_0(x^2)\right) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o_0(x^2)$
- $f(x) = (1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + o_0(x^3)$
- $f(x) = (x+1) \left(1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + o_0(x^3)\right) = 1 - x^2 + x^3 + o_0(x^3)$
- $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + o_0(x^3)\right) = -\frac{1}{6}x^2 + o_0(x^3)$
- $f(x) = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)}{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o_0(x^2)}$.
On obtient $f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o_0(x^2)\right) = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 + o_0(x^2)$
- On pose $x = 1 + h$. On obtient
 $f(1+h) = \cos(\ln(1+h)) = \cos\left(h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o_0(h^3)\right) = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 + o_0(h^3)$
Donc $f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$

Exercice 2: À chaque fois, on utilise les développements limités des fonctions usuelles mises en jeu. Il est inutile de pousser le développement trop loin. En général, un développement limité à l'ordre 1, 2 voire 3 suffit.

- La limite est 0.
- La limite est $-\frac{1}{6}$.
- La limite est 1.

Exercice 3:

- (a) On pose $x = 1 + h$ et on trouve que $f(1+h) = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + o_0(h^2)$
On trouve $f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$
- (b) On trouve $f(x) = \ln(2) + \frac{x-1}{4} - \frac{3(x-1)^2}{32} + o_1((x-1)^2)$.
- (c) On trouve $f(x) = e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2}(x-1) - \frac{5e^{-1}}{24}(x-1)^2 + \frac{5e^{-1}}{48}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$.
- (d) On trouve $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o_{\frac{\pi}{4}}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$.
- Les équations des tangentes aux courbes en $x=a$ sont les suivantes.
 - $y = 1 - (x-1)$
 - $y = \ln(2) + \frac{x-1}{4}$
 - $y = e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2}(x-1)$
 - $y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 4: En intégrant le DL de la dérivée, on obtient le résultat.

- On trouve $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$.
- On trouve $f(x) = \frac{\pi}{4} + x - \frac{2x^3}{3} + o_0(x^3)$.

Exercice 5:

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $h = \frac{1}{x}$.

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \left(1 + \frac{1}{h}\right) e^h = \left(1 + \frac{1}{h}\right) (1 + h + o_0(h)) = \frac{1}{h} + 2 + h + o_0(h).$$

On a donc

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. (a) On trouve le domaine de définition de f à l'aide d'un tableau de signes :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$$

De plus, on trouve que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- (b) On pose $x = \frac{1}{h}$ pour faire un développement asymptotique de f . On trouve que

$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On cherche aussi le $DL_2(-\infty)$ et on trouve

$$f(x) = 3x - 3 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

3. On trouve $f(x) = 2 + x - \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 6:

- On trouve $f(x) = \ln(2) - x^2 - \frac{x^4}{6} + o_0(x^4)$.
- On trouve $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o_0(x^3)$.
- On trouve $f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{e}{6}x^2 + o_0(x^2)$.
- On trouve $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}x^2 + o_0(x^2)$.
- On trouve $f(x) = 2 - 6x^2 + o_0(x^3)$.

Exercice 7:

1. On cherche un $DL_3(1)$ de la fonction f et on trouve

$$f(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{(x-1)^3}{2} + o_1((x-1)^3)$$

Donc l'équation de la tangente en 1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ est $y = 2x - 1$.

2. On trouve que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente pour $x < 1$ et en-dessous pour $x > 1$.

Exercice 8: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. On effectue un développement limité en 0 de la fonction f :

$$f(x) = \frac{x - x^2/2 + o_0(x^2) - x}{x^2} = \frac{-1}{2} + o_0(1).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$.

Donc f est continue en 0 si et seulement si $b = \frac{-1}{2}$ (a est quelconque)

2. Pour que la fonction soit dérivable en 0 il faut déjà qu'elle soit continue en 0 donc $b = \frac{-1}{2}$.

Etudions le taux d'accroissement pour $x > 0$

$$\frac{f(x) + 1/2}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} + \frac{1}{2}}{x} = \frac{2\ln(1+x) - 2x + x^2}{2x^3} = \frac{2x - x^2 + 2x^3/3 + o_0(x^3) - 2x + x^2}{2x^3} = \frac{1}{3} + o_0(1).$$

et pour $x < 0$

$$\frac{f(x) + 1/2}{x} = \frac{ax - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{x} = a$$

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si la limite en 0 du taux d'accroissement existe donc si et seulement si $a = \frac{1}{3}$ (et $b = \frac{-1}{2}$).

3. La fonction f est bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)$. Il reste à déterminer si la dérivée est continue en 0.

Pour $x > 0$ la fonction est dérivable et sa dérivée est $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - x - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3}$.

Or $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $2\ln(1+x) = 2x - x^2 + 2x^3/3 + o_0(x^3)$

Donc

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - x - 2\ln(1+x) + 2x}{x^3} = \frac{1}{3} + o_0(1)$$

D'autre part pour $x < 0$ la dérivée est $f'(x) = \frac{1}{3}$.

Et avec le calcul fait en 2 $f'(0) = \frac{1}{3}$.

On a bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = f'(0)$. Donc f' est continue en 0 et donc f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{-1}{2}$

Exercice 9:

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ est définie et $\mathcal{C}^\infty([0, \frac{\pi}{2}])$.

La question se pose en 0.

Effectuons un développement limité de la fonction en 0 :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^3)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^3) \right) = -\frac{x}{6} + o_0(x^2)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Montrons que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0.

On calcule le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{6} + o_0(x^2)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{6}$ et donc la fonction f prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

Montrons que la dérivée est alors continue en 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2}$.

Effectuons un développement limité :

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4))^2} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o_0(x^4)} = \frac{1}{x^2} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)$$

Donc

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)^2} = \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2) \right)$$

Donc

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o_0(x^2) \right) = -\frac{1}{6} + o_0(1)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{6} = f'(0)$. Donc la dérivée est continue en 0.

La fonction ainsi prolongée est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 10:

1. On trouve $g(x) = 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
2. On trouve $\varphi(x) = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{5}{24x^2} + \frac{5}{48x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$.

Exercice 11: On cherche un développement limité à l'ordre 2 en 1 de f (en posant $x = 1 + h$). On trouve que

$$f(x) = \underbrace{1}_{=f(1)} - \frac{(x-1)^2}{2} + o_1\left((x-1)^2\right)$$

On a donc $f(x) - f(1) \leq 0$ au voisinage de 1. Donc 1 est bien un maximum local de la fonction f .

Exercice 12:

1. On a $f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$.
2. On justifie l'existence de f^{-1} à l'aide du théorème de la bijection. La fonction f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. D'après le théorème de Taylor-Young, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o_0(y^3)$ (il n'y pas de coefficient constant car $f^{-1}(0) = 0$). On trouve les nombres a, b et c en remplaçant y par $f(x)$ et en utilisant le développement limité trouvé à la première question. On trouve finalement que

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} + \frac{y^2}{16} - \frac{y^3}{192} + o_0(y^3)$$

Exercice 13: On procède comme dans l'exercice précédent. On trouve que :

1. $g(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$ et $g^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{16} - \frac{y^3}{192} + o_0(y^3)$
2. $h(x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3)$ et $h^{-1}(y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2} + o_0(y^3)$

Exercice 14:

1. ★ **Étude de la continuité sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$.** La fonction $x \mapsto 1 - x$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ où la fonction $\ln$ est continue. Par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$. Par produit, la fonction $x \mapsto (1 - x) \ln(1 - x)$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ et cette fonction ne s'annule pas sur cet ensemble. Comme de plus, $x \mapsto -x$ est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, la fonction f est continue sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ comme quotient de fonctions continues.
 ★ **Étude de la continuité en 0.** Il s'agit de voir si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$. On sait que $\ln(1 - x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$ car $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(1 - x) \ln(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - x} = 1 = f(0)$$

donc la fonction f est continue en 0.

Finalement, la fonction f est continue sur $] -\infty, 1[$.

2. (a) On sait que $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$. En factorisant par $-x$, il vient $\ln(1 - x) = -x \left(1 + \frac{x}{2} + o_0(x)\right)$ et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1 - x) \left(1 + \frac{x}{2} + o_0(x)\right)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o_0(x)} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} + o_0(x)\right)} \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{x}{2} + o_0(x)$. On sait que $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u)$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2} + o_0(x) \right) = 0$$

on a $\boxed{f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o_0(x)}$.

(b) Pour x au voisinage de 0, on a $f(x) = f(0) + \frac{x}{2} + o_0(x)$ et donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} + o_0(1)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2}}$$

3. (a) La fonction $x \mapsto 1 - x$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ où la fonction $\ln$ est dérivable. Par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$. Par produit, la fonction $x \mapsto (1 - x) \ln(1 - x)$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ et cette fonction ne s'annule pas sur cet ensemble. Comme de plus, $x \mapsto -x$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, la fonction f est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(1-x) \ln(1-x) + x \left(-\ln(1-x) + (1-x) \times \frac{-1}{1-x} \right)}{((1-x) \ln(1-x))^2} \\ &= \frac{-\ln(1-x) - x}{((1-x) \ln(1-x))^2} \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall x \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[, f'(x) = -\frac{\ln(1-x) + x}{((1-x) \ln(1-x))^2}}$.

(b) La fonction h est dérivable sur $] -\infty, 1[$ et pour tout $x \in] -\infty, 1[$, on a

$$h'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$$

On en déduit le tableau de signes de h' et le tableau de variations de h et le tableau de signes de h suivants :

x	$-\infty$	0	1
x	$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$		$-$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
h	$-\infty$	0	$-\infty$
$h(x)$	$-$	0	$-$

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{x} \right) = -\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissances comparées et car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x} = -1$ (en factorisant par exemple par x). Finalement,

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 1[, \quad h(x) \leq 0}$$

(c) On a vu à la question 3.(a) que

$$\forall x \in -\infty, 0[\cup]0, 1[, \quad f'(x) = \frac{-h(x)}{((1-x) \ln(1-x))^2}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $-h(x)$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, c'est-à-dire strictement positif. On en déduit

donc que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1[$.

Comme la fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, 1[}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(1-x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = +\infty$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{X-1}{X \ln(X)} = +\infty$$

car $\lim_{X \rightarrow 0^+} (X-1) = -1 < 0$ et car $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0^-$ par croissances comparées. Le tableau de variations de f sur $-\infty, 0[\cup]0, 1[$ est

x	$-\infty$	1
$f(x)$	0	$+\infty$



4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $[0, 1[$. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$. On a $n \in [0, +\infty[$ donc,

$$\boxed{\text{il existe un unique nombre réel } u_n \in [0, 1[\text{ tel que } f(u_n) = n}$$

d'après le théorème de la bijection. De plus, $f(0) = 0$ par définition de f donc $u_1 = 0$.

- (b) Pour tout entier naturel n non nul, on a $f(u_{n+1}) - f(u_n) = (n+1) - n = 1 \geq 0$. Donc $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$. Or la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1[$ et $(u_n, u_{n+1}) \in [0, 1[$ donc $u_n \leq u_{n+1}$. On en déduit donc que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante}}$$

Par ailleurs, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \in [0, 1[$ donc en particulier, $u_n \leq 1$. Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 1. Comme elle est de plus croissante, on déduit du théorème de la limite monotone que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente}}$$

- (c) Notons $\ell \in [0, 1]$ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \neq 1$, c'est-à-dire que $\ell \in [0, 1[$. Pour tout entier naturel n non nul, on sait que $f(u_n) = n$. Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, elle est continue en ℓ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, ce qui est absurde car $f(\ell)$ est un nombre fini. On en conclut donc que $\boxed{\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$.