

TD27 – Correction

Exercice 1:

1. On sait que $\vec{u} = (2, 1)$ est un vecteur directeur de D_1 et $A \in D_1$. Par définition,

$$D_1 = \{M \in \mathcal{P} ; \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}\}$$

Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in D_1 &\iff (\overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}) \iff \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y+2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff x - 2y - 5 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite D_1 est donc $\boxed{x - 2y - 5 = 0}$.

Méthode 2 : $\vec{n} = (-1, 2)$ est normal à D_1 . Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$M \in D_1 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff -(x-1) + 2(y+2) = 0 \iff -x + 2y + 5 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite D_1 est donc $\boxed{-x + 2y + 5 = 0}$.

2. On sait que $\vec{v} = (1, 1)$ est un vecteur normal à la droite D_2 .

Méthode 1 : Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$M \in D_2 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = 0 \iff (x-3) + (y-1) = 0 \iff x + y - 4 = 0$$

Une équation cartésienne de la droite D_1 est donc $\boxed{x + y - 4 = 0}$.

Méthode 2 : Donc $\vec{w} = (-1, 1)$ est un vecteur directeur de la droite D_2 . Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in D_2 &\iff (\overrightarrow{BM} \text{ et } \vec{w} \text{ sont colinéaires}) \iff \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff x + y - 4 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite D_2 est donc $\boxed{x + y - 4 = 0}$.

3. Comme la droite D_3 passe par les points A et B , un vecteur directeur de cette droite est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (puisque $A \neq B$). On a $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2, 3)$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in D_3 &\iff (\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires}) \iff \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y+2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 3x - 2y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de D_3 est donc $\boxed{3x - 2y - 7 = 0}$.

4. D'après la représentation paramétrique de la droite D_4 , un vecteur directeur de cette droite est le vecteur $\vec{a} = (4, -2)$. De plus, cette droite passe par le point $D(2, 1)$. Pour tout $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a donc

$$\begin{aligned} M \in D_4 &\iff (\overrightarrow{DM} \text{ et } \vec{a} \text{ sont colinéaires}) \iff \begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -2x - 4y + 8 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de D_4 est donc $\boxed{x + 2y - 4 = 0}$.

5. Comme les droites D_3 et D_5 sont parallèles, un vecteur directeur de D_5 est un vecteur directeur de D_3 . De plus D_5 passe par le point $C(2, 2)$. Pour tout $M(x, y)$, on a

$$\begin{aligned} M \in D_5 &\iff (\overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires}) \iff \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 3x - 2y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de D_5 est donc $\boxed{3x - 2y - 2 = 0}$.

Exercice 2: Pour trouver une représentation paramétrique de chaque droite, il suffit d'en connaître un point et un vecteur directeur.

1. La droite D_1 admet le vecteur $\vec{u} = (1, -1)$ comme vecteur directeur et passe par le point $A(1, 1)$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ est donc

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. La droite D_2 (c'est une droite verticale) admet le vecteur $\vec{v} = (0, -1)$ comme vecteur directeur et passe par le point $A(3, 0)$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_2$ est donc

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Un vecteur directeur de la droite $D_3 = (AB)$ est $\overrightarrow{AB} = (-2, -1)$ et la droite passe par le point $A(1, 2)$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_3$ est donc

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 3:

1. Un point $M(x, y)$ du plan appartient aux deux droites D et D' si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations $2x + 3y - 2 = 0$ et $3x - y + 4 = 0$. On est donc ramené à résoudre le système linéaire suivant $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$. On trouve que ce système a une unique solution : le couple $(-\frac{10}{11}, \frac{14}{11})$. On en déduit que les droites D et D' (non parallèles) se coupent suivant le point de coordonnées $(-\frac{10}{11}, \frac{14}{11})$.
2. Un vecteur directeur de $D = (AB)$ est $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ et un vecteur directeur de $D' = (CE)$ est $\overrightarrow{CE} = (4, 4)$. On remarque que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On en déduit que les droites D et D' sont parallèles. Les deux droites sont confondues si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AE} = (7, 1)$. Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ valant $-12 \neq 0$, ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc les droites D et D' sont strictement parallèles. Par conséquent, $D \cap D' = \emptyset$.
3. Comme D' est parallèle à la droite d'équation cartésienne $2x + 6y - 1 = 0$ et passe par l'origine, une équation cartésienne de D' est $x + 3y = 0$. Soit $M(x, y)$ un point du plan. Alors M appartient à $D \cap D'$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = 2 + 3t$ et $y = -2 - t$ et $x + 3y = 0$. S'il existait un tel nombre réel t , alors on aurait $2 + 3t + 3(-2 - t) = 0$ et donc $-4 = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent, $D \cap D' = \emptyset$.
4. Un vecteur directeur de $D = (AB)$ est $\overrightarrow{AB} = (2, 6)$ et un vecteur directeur de $D' = (CE)$ est $\overrightarrow{CE} = (4, 12) = 2\overrightarrow{AB}$. Les deux droites sont donc parallèles. Elles sont confondues si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AC} = (-3, -9)$. Ces vecteurs sont colinéaires (calcul de déterminant). Donc les droites sont confondues, c'est-à-dire $D \cap D' = D = D'$.
5. Si $\vec{n} = (3, -1)$ est un vecteur normal de D , alors $\vec{u} = (1, 3)$ en est un vecteur directeur. Comme D passe par le point $F(1, 1)$, une représentation paramétrique de D est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M(1 + t, 1 + 3t)$. On cherche s'il existe une valeur de t pour laquelle M appartient à la droite D' . On résout :

$$-2x + 3y + 2 = 0 \iff -2(1 + t) + 3(1 + 3t) + 2 = 0 \iff 7t = -3 \iff t = -\frac{3}{7}$$

Donc les droites D et D' se coupent au point de coordonnées $(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7})$.

Exercice 4: Pour montrer que $\mathcal{E}$ est un cercle, on écrit l'équation définissant $\mathcal{E}$ sous la forme de l'équation réduite d'un cercle. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 &\iff x^2 + 4x + y^2 - 6y - 3 = 0 \\ &\iff (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 - 3 = 0 \\ &\iff (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega(-2, 3)$ et de rayon 4.

Exercice 5:

1. Montrons que $\mathcal{C}_a$ est un cercle. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2ax + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0 \\ \iff x^2 + 2ax + y^2 + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0 \\ \iff (x+a)^2 - a^2 + (y+2-a)^2 - (2-a)^2 - 4a + 4 = 0 \\ \iff (x+a)^2 + (y+2-a)^2 = 2a^2 = (\sqrt{2}|a|)^2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{C}_a$ est le cercle de centre $\Omega_a(-a, a-2)$ et de rayon $\sqrt{2}|a|$.

2. Il s'agit de montrer que deux cercles $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$, avec $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $a \neq b$, se coupent en un point dont les coordonnées ne dépendant pas de a et b . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0 & \text{L}_1 \\ x^2 + y^2 + 2bx + 2(2-b)y - 4b + 4 = 0 & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0 & \text{L}_1 \\ 2(b-a)x - 2(b-a)y - 4(b-a) = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0 & \text{L}_1 \\ x - y - 2 = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2(b-a)}\text{L}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Où la dernière équivalence provient du fait que $b-a \neq 0$. En remplaçant x par son expression en fonction de y dans la première équation ($x = y+2$), on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2ax + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0 \\ \iff (y+2)^2 + y^2 + 2a(y+2) + 2(2-a)y - 4a + 4 = 0 \\ \iff 2y^2 + 8y + 8 = 0 \\ \iff y^2 + 4y + 4 = 0 \\ \iff (y+2)^2 = 0 \\ \iff y = -2 \end{aligned}$$

Donc

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b \iff (x = 0 \text{ et } y = -2)$$

On en déduit que tous les cercles $\mathcal{C}_a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) passent par le point $A(0, -2)$.

Exercice 6:

1. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C} &\iff x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 - 4 + 1 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1, 2)$ et de rayon 2

2. Avant de déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ qui passe par A . On va chercher le point M tel que $M \in \mathcal{C}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0$. En effet une tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point $M \in \mathcal{C}$ est perpendiculaire à (ΩM) (c'est même une caractérisation de la tangente).

Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ (x+1)(x-1) + y(y-2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1 \\ x = -y + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En substituant la deuxième équation dans la première, on a

$$\begin{aligned} (-y+1)^2 + y^2 - 2(-y+1) - 4y = -1 &\iff 2y^2 - 4y = 0 \\ &\iff y = 0 \text{ ou } y = 2 \end{aligned}$$

Comme $x = -y + 1$, on obtient 2 points : $M_1(0, 1)$ et $M_2(-1, 2)$.

Il y a donc 2 tangentes à $\mathcal{C}$ qui passent par A , la droite (AM_1) et la droite (AM_2) .

Exercice 7: Pour tout nombre réel k , notons $\mathcal{C}_k$ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_k &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k \\ &\iff (x-2)(x+1) + (y-0)(y-4) = k \\ &\iff x^2 - x - 2 + y^2 - 4y = k \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y-2)^2 - 4 = k \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = k + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

La nature de l'ensemble $\mathcal{C}_k$ dépend donc du signe de $k + \frac{25}{4}$. On distingue trois cas.

- ★ Si $k < -\frac{25}{4}$, alors $\mathcal{C}_k = \emptyset$ (puisque alors $k + \frac{25}{4} < 0$ et une somme de nombres réels au carré ne peut pas être strictement négative) ;
- ★ si $k = -\frac{25}{4}$, alors $\mathcal{C}_k = \{\Omega(\frac{1}{2}, 2)\}$;
- ★ si $k > -\frac{25}{4}$, alors $\mathcal{C}_k$ est le cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2}, 2)$ et de rayon $\sqrt{k + \frac{25}{4}}$.

Exercice 8: On remarque que B ne peut pas être solution de l'équation. Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \{B\}$. On sait que $MA^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA}$ et de même $MB^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB}$. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MB} = 2 &\iff MA^2 = 4MB^2 \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ &\iff (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0 \end{aligned}$$

Notons G_1 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -2)$ et G_2 le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$. Alors $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG_1}$ et $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG_2}$. Par conséquent,

$$\frac{MA}{MB} = 2 \iff \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$$

On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

Exercice 9:

- Il s'agit de vérifier que les trois points A , B et C ne sont pas alignés. On a $\overrightarrow{AB} = (-4, -1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2, 3)$. Leur déterminant vaut $-14 \neq 0$ donc ces vecteurs ne sont pas alignés. Ainsi, les points A , B et C ne sont pas alignés et donc le triangle ABC n'est pas aplati.
- ★ **Équation cartésienne de (AB)** : soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -x + 4y - 5 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc $x - 4y + 5 = 0$.

- ★ **Équation cartésienne de (AC)** : soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 3x + 2y - 13 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AC) est donc $3x + 2y - 13 = 0$.

- ★ **Équation cartésienne de (BC)** : soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$. Un vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC} = (2, 4)$ donc

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff \text{les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ y-1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 4x - 2y + 6 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (BC) est donc $2x - y + 3 = 0$.

- On sait que le centre de gravité du triangle ABC correspond à l'isobarycentre des points A , B et C . Ses coordonnées sont

$$\boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \quad \text{et} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{8}{3}}$$

- On cherche l'intersection des médiatrices du triangle ABC . Déterminons la médiatrice du segment $[AB]$, notée D . Pour tout $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a (comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$),

$$\begin{aligned} M \in D &\iff AM = BM \\ &\iff AM^2 = BM^2 \\ &\iff (x-3)^2 + (y-2)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 \\ &\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ &\iff 8x + 2y - 11 = 0 \end{aligned}$$

Déterminons de même la médiatrice D' du segment $[AC]$. Pour tout $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a

$$\begin{aligned} M \in D' &\iff AM = CM \\ &\iff AM^2 = CM^2 \\ &\iff (x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2 \\ &\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 \\ &\iff 4x - 6y + 13 = 0 \end{aligned}$$

Le centre $\Omega(a, b)$ de cercle circonscrit au triangle ABC est l'intersection des droites D et D' . On résout :

$$\begin{cases} 4x - 6y = -13 & L_1 \\ 8x + 2y = 11 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 6y = -13 & L_1 \\ 14y = 37 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}(6y - 13) = 10 \\ y = \frac{37}{14} \end{cases}$$

Pour déterminer les médiatrices on aurait pu aussi utiliser une autre caractérisation : la médiatrice de $[AB]$ est la droite qui coupe $[AB]$ perpendiculairement en son milieu.

5. On sait que l'orthocentre du triangle ABC est l'intersection des hauteurs de ce triangle. Ce point $H(x, y)$ est caractérisé par les relations $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. On a

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \iff 2(x - 3) + 4(y - 2) = 0 \iff x + 2y - 5 = 0$$

et

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff -2(x + 1) + 3(y - 1) = 0 \iff 2x - 3y + 5 = 0$$

Les coordonnées x et y du point H sont donc caractérisées par $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$. On trouve $x = \frac{5}{7}$ et $y = \frac{15}{7}$.

6. Étant donnée une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$), commençons par déterminer la distance d'un point $M(x, y)$ du plan à la droite $\mathcal{D}$, notée $d(M, \mathcal{D})$. Si $P(x_P, y_P)$ désigne le projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$, alors on a $d(M, \mathcal{D}) = PM$. On sait qu'un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{n} = (a, b)$. D'une part, $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = (x - x_P, y - y_P) \cdot (a, b) = a(x - x_P) + b(y - y_P) = ax + by + c$ (puisque $ax_P + by_P + c = 0$). D'autre part,

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{PM}\| \|\vec{n}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{PM}, \vec{n}}) = PM \sqrt{a^2 + b^2}$$

d'où $d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Ceci permet de trouver l'équation de la bissectrice intérieure issue de A . En effet, si $\mathcal{B}$ désigne cette bissectrice, alors $M \in \mathcal{B}$ si et seulement si $d(M, (AB)) = d(M, (AC))$. Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a donc

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{B} &\iff \frac{|x - 4y + 5|}{\sqrt{17}} = \frac{|3x + 2y - 13|}{\sqrt{13}} \\ &\iff \sqrt{13}(x - 4y + 5) = \sqrt{17}(3x + 2y - 13) \quad \text{ou} \quad \sqrt{13}(x - 4y + 5) = \sqrt{17}(-3x - 2y + 13) \\ &\iff y = \frac{\sqrt{13} - 3\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 4\sqrt{13}}x + \frac{5\sqrt{13} + 13\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 4\sqrt{13}} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\sqrt{13} + 3\sqrt{17}}{4\sqrt{13} - 2\sqrt{17}}x + \frac{5\sqrt{13} - 13\sqrt{17}}{4\sqrt{13} - 2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

Or la bissectrice intérieure a un coefficient directeur négatif (dessin) donc la droite cherchée a pour

équation $y = \frac{\sqrt{13} - 3\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 4\sqrt{13}}x + \frac{5\sqrt{13} + 13\sqrt{17}}{2\sqrt{17} + 4\sqrt{13}}$.

Exercice 10:

1. On commence par vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. S'ils l'étaient, alors il existerait

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = \lambda \vec{v} \text{ ou } \vec{v} = \lambda \vec{u}, \text{ ce qui se traduit en terme de coordonnées par } \begin{cases} 2 = 2\lambda \\ 0 = \lambda \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda \\ 0 = 1 \\ 1 = \lambda \end{cases}, \text{ les deux systèmes aboutissant à des absurdités. Donc les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas}$$

colinéaires. Une représentation paramétrique du plan P de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et passant par le point A est donc

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + s \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

Pour déterminer une équation cartésienne du plan P , on cherche un vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$ à P . On cherche donc $\vec{n}$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$. On a

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff (a, b, c) = (a, -2a, -2a)$$

On vient de montrer que les vecteurs normaux au plan P sont les vecteurs de la forme $(a, -2a, -2a)$ où $a \in \mathbb{R}$. En particulier, le vecteur $\vec{n} = (1, -2, -2)$ est un vecteur normal au plan P . Une équation de P est donc de la forme $x - 2y - 2z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$. Or $A(1, -1, 2) \in P$ donc $d = 1$. Finalement, une équation cartésienne du plan P est $\boxed{x - 2y - 2z + 1 = 0}$.

Autre méthode : on peut obtenir une équation cartésienne de P à partir d'un système d'équations paramétriques. En effet, pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in P &\iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2s + 2t = x - 1 & L_1 \\ t = y + 1 & L_2 \\ s = z - 2 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2s + 2t = x - 1 & L_1 \\ t = y + 1 & L_2 \\ -2t = 2z - x - 3 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2s + 2t = x - 1 & L_1 \\ t = y + 1 & L_2 \\ 0 = 2z - x + 2y - 1 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on vient de montrer que $M(x, y, z)$ appartenait au plan P si et seulement si l'équation (de compatibilité) $2z - x + 2y - 1$ est satisfaite. Cette équation est une équation cartésienne du plan P .

2. Considérons les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (0, 2, -2)$. On montre comme dans la question 1. que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan P . On en déduit qu'une représentation paramétrique de P est

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 1 - 2s + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2}$$

Cherchons maintenant une équation cartésienne en déterminant un vecteur normal à P . En procédant comme dans la question 1., on trouve qu'un vecteur normal au plan P est (par exemple) $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Une équation cartésienne de P est donc de la forme $x + y + z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$. En exploitant le fait que le point A (par exemple) appartient à P , trouve que $d = -1$ puis qu'une équation cartésienne de P est $\boxed{x + y + z - 1 = 0}$.

3. Une équation cartésienne de P est de la forme $2x - y - z + d = 0$. Comme $A \in P$, on a $d = 0$. D'où l'équation cartésienne : $\boxed{2x - y - z = 0}$. Les points $O(0, 0, 0)$ et $B(0, 1, -1)$ appartiennent au plan P . De plus, les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (0, 1, -1)$ ne sont pas colinéaires (vérifiez le!). On en déduit qu'une base du plan P est $(\vec{u}, \vec{v})$. Ainsi, une représentation paramétrique du plan P est

$$\boxed{\begin{cases} x = s \\ y = s + t \\ z = s - t \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2}$$

Exercice 11:

1. Un vecteur directeur de la droite D_1 est $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -1)$. Une représentation paramétrique de D_1 est donc

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

2. Un vecteur directeur de D_2 est $\vec{u} = (2, -3, -1)$. Une représentation paramétrique de D_1 est donc

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout le système d'équations $\mathcal{S}$ proposé :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 6 & \text{L}_1 \leftrightarrow \text{L}_2 \\ 2x + 3y - z = 4 & \text{L}_2 \leftrightarrow \text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 6 & \text{L}_1 \\ y + 3z = 8 & \text{L}_2 \leftarrow 2\text{L}_1 - \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -10 + 5z \\ y = 8 - 3z \end{cases} \end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de D_1 est donc

$$\begin{cases} x = -10 + 5t \\ y = 8 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 12:

1. Un point de la droite D est $A(1, 2, -1)$ (en prenant $t = 0$) et elle est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, -1, 2)$. Il s'agit de trouver deux plans P et Q contenant la droite D et sécants. On utilise une représentation paramétrique de D . Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned} M \in D &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + t & \text{L}_1 \\ y = 2 - t & \text{L}_2 \\ z = -1 + 2t & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + t & \text{L}_1 \\ x + y = 3 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_1 + \text{L}_2 \\ -2x + z = -3 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - 2\text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Un vecteur normal au plan d'équation cartésienne $2x - y + z = 1$ est $\vec{n} = (2, -1, 1)$. Comme D est perpendiculaire à ce plan, un vecteur directeur de D est $\vec{n}$. On peut alors déterminer une représentation paramétrique de D et raisonner comme dans la question 1. pour trouver un système d'équations cartésiennes de D . Pour tout $M(x, y, z) \in D$, on a

$$\begin{aligned} M \in D &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2t & \text{L}_1 \\ y = -t & \text{L}_2 \\ z = 1 + t & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 2t & \text{L}_1 \\ x + 2y = 1 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_1 + 2\text{L}_2 \\ x - 2z = -1 & \text{L}_3 \leftarrow \text{L}_1 - 2\text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 13:

1. On a $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -1)$. On vérifie que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A , B et C ne sont pas alignés ; ils définissent donc bien un plan P . Cherchons

un vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ au plan P . Un tel vecteur est caractérisé par $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.
On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 & L_1 \\ -2a + b - c = 0 & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 & L_1 \\ -b - 3c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = b + c = -2c \\ b = -3c \end{cases} \\ &\iff \vec{n} = (-2c, -3c, c) \end{aligned}$$

En prenant $c = -1$, on trouve donc que $\vec{n} = (2, 3, -1)$ est un vecteur normal au plan P . Une équation cartésienne de P est donc de la forme $2x + 3y - z + d = 0$. Or $A(1, 1, 1) \in P$ donc $d = -4$. Finalement, une équation cartésienne du plan P est $\boxed{2x + 3y - z - 4 = 0}$.

2. Notons Δ la droite perpendiculaire au plan P passant par D . Comme $\vec{n} = (2, 3, -1)$ est un vecteur normal au plan P , c'est un vecteur directeur de Δ . On sait que $D(0, -3, 1) \in \Delta$ donc une représentation paramétrique de Δ est

$$\Delta : \begin{cases} x = & 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Comme Δ est perpendiculaire au plan P et passe par le point D , le point D' est caractérisé par la relation $\overrightarrow{DD'} = 2\overrightarrow{DH}$ où H désigne l'intersection du plan P avec la droite Δ . Commençons par déterminer les coordonnées de H . Comme $H \in \Delta$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de H soient $(2t, -3 + 3t, 1 - t)$. En remplaçant dans l'équation cartésienne de P , on obtient $4t + 3(-3 + 3t) - (1 - t) - 4 = 0$ soit $14t - 14 = 0$ et donc $t = 1$. Les coordonnées du point H sont donc $(2, 0, 0)$. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{DD'} = 2\overrightarrow{DH}$ se réécrit, en notant (a, b, c) les coordonnées du point D' ,

$$(a, b + 3, c - 1) = 2(2, 3, -1) = (4, 6, -2)$$

ce qui fournit $a = 4$, $b = 3$ et $c = -1$. Finalement, le symétrique du point D par rapport au plan P est $\boxed{D'(4, 3, -1)}$.

Exercice 14:

1. En utilisant la définition du produit scalaire à partir du projeté orthogonale, on obtient :

$$AH \times \|\overrightarrow{AB}\| = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}.$$

Comme $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, on a

$$AH \times \|\overrightarrow{AB}\| = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

On utilise maintenant que le triangle est un triangle équilatéral.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2 \end{aligned}$$

D'où

$$AH \times \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2$$

On obtient $AH = (1 + \frac{1}{4})\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{5}{4}\|\overrightarrow{AB}\|$.

On a donc $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$.

Donc H est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$

2. Soit G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 5)$ et $(C, 2)$.

On a alors pour tout point M ; $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{8}(\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})$ Appliquons cette formule en I .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IG} &= \frac{1}{8}(\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}) \\ &= \frac{1}{8}(\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}) \text{ car } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{IH} \text{ car } H \text{ est le barycentre de } (A, 1) \text{ et } (B, 3).\end{aligned}$$

Exercice 15:

1. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}M(x, y) \in d \cap d' &\iff \begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 3y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

2. Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$.

$$\begin{aligned}M(x, y) \in d \cap \mathcal{C} &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 16 \\ x = -3y + 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (-3y + 4)^2 + y^2 + 4y = 16 \\ x = -3y + 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 10y^2 - 20y = 0 \\ x = -3y + 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}M(x, y, z) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 &\iff \begin{cases} x + y = -\lambda \\ x + z = -1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + y = -2\lambda - 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = -\lambda \\ -y + z = -1 + \lambda & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + z = \lambda & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ -2y = \lambda - 2 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = -\lambda \\ -y + z = -1 + \lambda \\ 2z = 2\lambda - 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -2z = -\lambda & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases}\end{aligned}$$

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes si et seulement si le système admet une solution.

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes si et seulement si $-\lambda = 2\lambda - 1$ c'est à dire $\lambda = \frac{1}{3}$.

Exercice 16:

1. On utilisant la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'B}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B}$$

Or $[AA']$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$. Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A'B}$. Ainsi, les droites $(AB) = (MA)$ et $(A'B)$ sont perpendiculaires et donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$. Ceci démontre la première égalité. Ensuite,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} &= (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A'}) \\ &= \overrightarrow{M\Omega}^2 + \underbrace{\overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{M\Omega}}_{=0} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} \end{aligned}$$

où la somme des termes au milieu est nulle car Ω est le milieu du segment $[AA']$. Enfin comme $\overrightarrow{\Omega A'} = -\overrightarrow{\Omega A}$, on a $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} = -\overrightarrow{\Omega A}^2 = -\|\overrightarrow{\Omega A}\|^2 = -r^2$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{M\Omega}^2 - r^2 = \overrightarrow{\Omega M}^2 - r^2}$$

On vient de montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend que du centre Ω du cercle et de son rayon. En particulier,

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \text{ ne dépend pas de la droite } D \text{ choisie}}$$

2. La droite (MT) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ (le point de contact étant le point T). Donc cette droite est perpendiculaire au rayon du cercle issue du point T . Par conséquent, le triangle $MT\Omega$ est rectangle en T . La réciproque du théorème de Pythagore fournit l'égalité $MT^2 + r^2 = M\Omega^2$ (puisque $T\Omega = r$). L'égalité obtenue dans la question 1. permet de conclure : $\boxed{\mathcal{C}(M) = MT^2}$. La même relation vaut pour l'autre point de contact T' .
3. En reprenant la relation obtenue dans la question 1., il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(M) &= \overrightarrow{\Omega M}^2 - r^2 = \Omega M^2 - r^2 \\ &= (x_M - a)^2 + (y_M - b)^2 - r^2 \\ &= x_M^2 - 2ax_M + y_M^2 - 2by_M + a^2 + b^2 - r^2 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{C}(M) = x_M^2 - 2ax_M + y_M^2 - 2by_M + c \quad \text{avec} \quad c = a^2 + b^2 - r^2}$$

Exercice 17:

1. (a) Une représentation paramétrique de la droite D_1 est

$$D_1 : \begin{cases} x &= 1 &+ t \\ y &= -1 &+ 2t \\ z &= 2 &- t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On raisonne par l'absurde. Supposons que $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Alors il existe un nombre réel t tel que le point $M(1+t, -1+2t, 2-t)$ appartienne à la droite D_2 . La première équation de D_2 fournit $(1+t) - (-1+2t) + (2-t) = 3$ soit $t = 1/2$. La deuxième équation de D_2 donne $2(1+t) + (-1+2t) - 2(2-t) = 1$ soit $t = 2/3$, ce qui est absurde. Finalement, $\boxed{D_1 \cap D_2 = \emptyset}$.

- (b) Pour trouver un vecteur directeur de D_2 , il suffit d'en connaître deux points (distincts). Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in D_2 &\iff \begin{cases} x - y + z = 3 & \text{L}_1 \\ 2x + y - 2z = 1 & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y + z = 3 & \text{L}_1 \\ 3y - 4z = -5 & \text{L}_2 - 2\text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y - z + 3 = \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3}z - \frac{5}{3} \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}z + \frac{4}{3}, \frac{4}{3}z - \frac{5}{3}, z\right) \end{aligned}$$

Pour les choix $z = 0$ et $z = 1$, on trouve donc que les points $B(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0)$ et $C(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ appartiennent à la droite D_2 . Un vecteur directeur de D_2 est donc $\overrightarrow{BC} = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1)$. Donc $\vec{u}_2 = 3\overrightarrow{BC} = (1, 4, 3)$ dirige aussi la droite D_2 . On vérifie rapidement (en raisonnant par l'absurde) que les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$ et $\vec{u}_2 = (1, 4, 3)$ ne sont pas colinéaires. Finalement,

les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles

2. (a) On cherche un vecteur directeur $\vec{U} = (a, b, c)$ de la droite Δ . Ce vecteur est caractérisé par $\vec{U} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{U} \perp \vec{u}_2$. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{U} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{U} \perp \vec{u}_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 & \text{L}_1 \\ a + 4b + 3c = 0 & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 & \text{L}_1 \\ b + 2c = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}(\text{L}_2 - \text{L}_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = c - 2b = 5c \\ b = -2c \end{cases} \\ &\iff \vec{U} = (5c, -2c, c) \end{aligned}$$

En prenant par exemple $c = 1$, on trouve qu'un vecteur directeur de Δ est $\vec{U} = (5, -2, 1)$.

- (b) Comme la droite Δ est perpendiculaire aux droites D_1 et D_2 , elle coupe ces deux droites en deux points notés respectivement A_1 et A_2 . Comme P_1 contient la droite D_1 , il contient le point A_1 . Pour tout point M de Δ , il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A_1M} = \lambda \vec{U}$ et donc $\overrightarrow{A_1M} = 0 \cdot \vec{u}_1 + \lambda \cdot \vec{U}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{A_1M}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{U}$ sont coplanaires. On en déduit que $M \in P_1$. Finalement, la droite Δ est contenue dans le plan P .
- (c) Comme dans la question 2., on conclut que la droite Δ est contenue dans le plan P_2 .
3. (a) ★ **Équation cartésienne de P_1** : On cherche un vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$ au plan P_1 . Il est caractérisé par $\vec{n} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{n} \perp \vec{U}$. On résout :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{U} \end{cases} &\iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 & \text{L}_1 \\ 5a - 2b + c = 0 & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 2b - c = 0 & \text{L}_1 \\ -12b + 6c = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - 5\text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ c = 2b \end{cases} \\ &\iff \vec{n} = (0, b, 2b) \end{aligned}$$

En prenant par exemple $b = 1$, on trouve que $\vec{n} = (0, 1, 2)$ est un vecteur normal au plan P_1 . Une équation cartésienne du plan P_1 est donc de la forme $y + 2z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$. Or $A(1, -1, 2) \in P_1$ donc $d = -3$. Une équation cartésienne de P_1 est donc $y + 2z - 3 = 0$.

- ★ **Équation cartésienne de P_2** : On cherche un vecteur normal $\vec{m} = (\alpha, \beta, \gamma)$ au plan P_2 . Il est caractérisé par $\vec{m} \perp \vec{u}_2$ et $\vec{m} \perp \vec{U}$. On résout :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{m} \perp \vec{u}_2 \\ \vec{m} \perp \vec{U} \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 & \text{L}_1 \\ 5\alpha - 2\beta + \gamma = 0 & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 & \text{L}_1 \\ -22\beta - 14\gamma = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - 5\text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -4\beta - 3\gamma = -4\beta + \frac{33}{7}\beta = \frac{5}{7}\beta \\ \gamma = -\frac{11}{7}\beta \end{cases} \\ &\iff \vec{m} = (\frac{5}{7}\beta, \beta, -\frac{11}{7}\beta) \end{aligned}$$

En prenant par exemple $\beta = 7$, on trouve que $\vec{m} = (5, 7, -11)$ est un vecteur normal au plan P_2 . Une équation cartésienne du plan P_2 est donc de la forme $5x + 7y - 11z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$. Or on a vu à la question 1. (b) que $B(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0) \in P_2$. On trouve que $d = 5$. Une équation cartésienne du plan P_2 est finalement $5x + 7y - 11z + 5 = 0$.

- (b) Donnons des équations paramétriques de la droite Δ . On sait que $\Delta = P_1 \cap P_2$. Pour tout $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, on a donc

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\iff \begin{cases} 5x + 7y - 11z = -5 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -1 - \frac{7}{5}y + \frac{11}{5}z = -\frac{26}{5} + 5z \\ y = 3 - 2z \end{cases} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{26}{5} + 5t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les points d'intersection de Δ avec les plans P_1 et P_2 . Commençons par l'intersection avec P_1 . Soit $t \in \mathbb{R}$. On résout : pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 + t = -\frac{26}{5} + 5s \\ -1 + 2t = 3 - 2s \\ 2 - t = s \end{cases} &\iff \begin{cases} t - 5s = -\frac{31}{5} & \text{L}_1 \\ t + s = 2 & \text{L}_2 \\ t + s = 2 & \text{L}_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s = \frac{21}{20} \\ t = \frac{19}{20} \end{cases} \end{aligned}$$

En remplaçant la valeur de t dans la représentation paramétrique de D_1 , on trouve que l'intersection de D_1 et Δ est $A_1\left(\frac{39}{20}, -\frac{9}{10}, \frac{21}{20}\right)$. On procède de la même manière pour trouver A_2 (point d'intersection de D_2 et Δ). En remplaçant les coordonnées en fonction de t (de la représentation paramétrique de Δ trouvée) dans le système d'équations cartésiennes de D_2 , on trouve que ces droites se coupent pour la valeur du paramètre $t = \frac{7}{5}$. En reportant dans la représentation paramétrique de Δ , on trouve $A_2\left(\frac{9}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

Exercice 18:

1. (a) Des vecteurs directeurs des différentes droites sont données dans le tableau suivant :

Droite	un vecteur directeur
(OA)	$\overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$
(OB)	$\overrightarrow{OB} = (0, 3, 0)$
(OC)	$\overrightarrow{OC} = (0, 0, 2)$
(AB)	$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 0)$
(AC)	$\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$
(BC)	$\overrightarrow{BC} = (0, -3, 2)$

- (b) On a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ donc (OA) et (BC) sont orthogonales et $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc (OB) et (AC) sont orthogonales. De même, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc (OC) et (AB) sont orthogonales. Ainsi :

les arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales

2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une base du plan (ABC) . Soit

$M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 M \in (ABC) &\iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\
 &\iff \exists (t, s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 2 - 2t - 2s \\ y = 3t \\ z = 2s \end{cases} \\
 &\iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2t + 2s = 2 - x & L_1 \\ 3t = y & L_2 \\ 2s = z & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2t + 2s = 2 - x & L_1 \\ -6s = 2y - 3(2 - x) & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ 2s = z & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{cases} \\
 &\iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 2t + 2s = 2 - x & L_1 \\ -6s = 2y - 3(2 - x) & L_2 \\ 0 = 3z + 2y + 3x - 6 & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{cases} \\
 &\iff 3x + 2y + 3z - 6 = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi une équation cartésienne du plan (ABC) est $3x + 2y + 3z - 6 = 0$.

- (b) Notons $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire au plan (ABC) passant par O . Le vecteur $\vec{n} = (3, 2, 3)$ est normal au plan (ABC) . Il dirige donc la droite $\mathcal{D}$. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$. Alors :

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{OM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OM} = t\vec{n}$$

$$\iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

- (c) Le projeté orthogonal H de O sur le plan (ABC) appartient à la fois à $\mathcal{D}$ et (ABC) . Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de H soient $(3t, 2t, 3t)$. On a $3 \times (3t) + 2 \times (2t) + 3 \times (3t) - 6 = 0$

donc $22t = 6$ puis $t = \frac{3}{11}$ d'où $H\left(\frac{9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}\right)$.

- (d) Les vecteurs $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 2)$ et $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}\right)$ ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une base du plan (OCH) . On a $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$. Ainsi, le plan (OCH) est perpendiculaire à la droite (AB) .

- (e) A l'aide des questions précédentes, on peut déterminer une représentation paramétrique de la droite (CH) :

$$\begin{cases} x = \frac{9}{11}t \\ y = \frac{6}{11}t \\ z = 2 - \frac{13}{11}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 2 - 2s \\ y = 3s \\ z = 0 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$. Ainsi :

$$K \in (CH) \cap (AB) \iff \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{9}{11}t = 2 - 2s \\ \frac{6}{11}t = 3s \\ 2 - \frac{13}{11}t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{22}{13} \\ s = \frac{4}{13} \end{cases}$$

On en déduit donc que $K\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}, 0\right)$.

- (f) Pour montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC , il faut montrer que H appartient à au moins deux hauteurs du triangle ABC . Or le plan (OCH) et la droite (AB) sont perpendiculaire donc les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires. Autrement dit, (CH) est une hauteur du triangle ABC . Vérifions que (AH) est aussi une hauteur du triangle ABC , c'est à dire que (AH) et (BC) sont perpendiculaires. On a $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\frac{-13}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11} \right) \cdot (0, -3, 2) = 0$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Finalement $\boxed{H \text{ est l'orthocentre du triangle } ABC}$.

3. (a) On sait que $G = \text{bar}\{(O, 1), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ donc :

$$x_G = \frac{x_O + x_A + x_B + x_C}{4}, \quad y_G = \frac{y_O + y_A + y_B + y_C}{4}, \quad z_G = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4}$$

ce qui fournit $\boxed{G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)}$.

- (b) Notons $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées de S . La symétrie est caractérisée par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GS} \iff \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{3}{4}, z - \frac{1}{2}\right)$$

et donc $\boxed{S\left(1, \frac{3}{2}, 1\right)}$.

- (c) Le point S est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $OABC$ si et seulement si $SO = SA = SB = SC$. Or :

$$SO = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad SA = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

et

$$SB = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}, \quad SC = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

donc $\boxed{S \text{ est bien le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre } OABC}$.