

Devoir Maison 1 - correction

Problème 1 : Calcul

On rappelle que tout nombre réel x admet une unique racine cubique, notée $\sqrt[3]{x}$.

Partie A : Questions préliminaires

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons

$$u = \sqrt[3]{x} \quad \text{et} \quad v = \sqrt[3]{y}.$$

Alors $u^3 = x$ et $v^3 = y$. Par conséquent,

$$(uv)^3 = u^3 v^3 = xy.$$

Ainsi, uv est un réel dont le cube vaut xy . Par unicité de la racine cubique,

$$\boxed{\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y}}.$$

En prenant $y = x$, on obtient

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} = (\sqrt[3]{x})^2.$$

Donc

$$\boxed{(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u = \sqrt[3]{x}$. On a $u^3 = x$, donc

$$(-u)^3 = -u^3 = -x.$$

Ainsi, $-u$ est un réel dont le cube vaut $-x$. Par unicité de la racine cubique,

$$\boxed{\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}}.$$

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On développe :

$$\begin{aligned} (x - y)^3 &= (x - y)(x - y)^2 \\ &= (x - y)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 \\ &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}.$$

Partie B : Racines cubiques

On pose

$$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} \quad \text{et} \quad b = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}.$$

4. D'après la propriété démontrée à la question 1,

$$ab = \sqrt[3]{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)}.$$

Or

$$(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7) = (5\sqrt{2})^2 - 7^2 = 50 - 49 = 1.$$

Donc

$$\boxed{ab = 1}.$$

Par définition,

$$a^3 = 5\sqrt{2} + 7 \quad \text{et} \quad b^3 = 5\sqrt{2} - 7,$$

d'où

$$a^3 - b^3 = (5\sqrt{2} + 7) - (5\sqrt{2} - 7) = 14.$$

Ainsi,

$$\boxed{a^3 - b^3 = 14}.$$

5. On pose

$$A = a - b.$$

En utilisant l'identité démontrée à la question 3,

$$\begin{aligned} A^3 &= (a - b)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 - 3ab(a - b). \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $a^3 - b^3 = 14$ et $ab = 1$. Comme $a - b = A$, on obtient

$$A^3 = 14 - 3A.$$

Par conséquent,

$$\boxed{A^3 + 3A - 14 = 0}.$$

6. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

En développant le membre de droite,

$$\begin{aligned} (x - 2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 2\alpha x^2 - 2\beta x - 2\gamma \\ &= \alpha x^3 + (\beta - 2\alpha)x^2 + (\gamma - 2\beta)x - 2\gamma. \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on doit avoir

$$\begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta - 2\alpha = 0, \\ \gamma - 2\beta = 3, \\ -2\gamma = -14. \end{cases}$$

On obtient

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 7,$$

et on vérifie bien que $\gamma - 2\beta = 7 - 4 = 3$.

Ainsi,

$$\boxed{x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7)}.$$

7. D'après la question 6, A est solution de

$$x^3 + 3x - 14 = 0.$$

D'après la factorisation obtenue à la question 7,

$$x^3 + 3x - 14 = 0 \iff (x - 2)(x^2 + 2x + 7) = 0.$$

La première équation donne $x = 2$.

Pour la seconde équation,

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 7 = -24 < 0,$$

donc elle n'admet aucune solution réelle.

Ainsi, l'équation $x^3 + 3x - 14 = 0$ admet une unique solution réelle, égale à 2. Comme A est réel et vérifie cette équation,

$$\boxed{A = 2}.$$

8. D'après les questions 5 et 8,

$$a - b = 2 \quad \text{et} \quad ab = 1.$$

Comme $a = b + 2$, on a

$$b(b + 2) = 1,$$

soit

$$b^2 + 2b - 1 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8.$$

Ainsi,

$$b = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Or

$$5\sqrt{2} - 7 > 0,$$

donc

$$b = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} > 0.$$

Comme $-1 - \sqrt{2} < 0$, on en déduit

$$b = \sqrt{2} - 1.$$

Enfin,

$$a = b + 2 = \sqrt{2} + 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{a = \sqrt{2} + 1 \quad \text{et} \quad b = \sqrt{2} - 1}.$$