

Semaine n°2 du 21 septembre au 25 septembre

Logique et ensembles

- ⇒ Proposition ou assertion : définition, exemples.
- ⇒ opérateurs : NON, ET, OU, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
- ⇒ Négation du ET ou du OU :

$$\text{Non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow \text{Non}(P) \text{ ou } \text{Non}(Q)$$

$$\text{Non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \text{Non}(P) \text{ et } \text{Non}(Q)$$

- ⇒ Distributivité :

$$(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \Leftrightarrow (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$$

$$(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$$

- ⇒ Ensembles : notations $\emptyset$, $\in$, $\subset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- ⇒ Méthode de démonstration pour montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre, ou que deux ensembles sont égaux.
- ⇒ Parties d'un ensemble, notation $\mathcal{P}(E)$.
- ⇒ Opérations sur les ensembles : union et intersection (associative, commutative, distributivité), complémentaire, lois de De Morgan.
- ⇒ Produit cartésien : définition.
- ⇒ Quantificateurs : $\forall$, $\exists$, $\exists!$, négation des quantificateurs.
- ⇒ Différents types de démonstration :
 - Raisonnement direct
 - Raisonnement par contraposée
 - Raisonnement par disjonction de cas
 - Raisonnement par l'absurde
 - Utilisation d'un contre exemple
 - Récurrence simple (le symbole Σ n'est pas maîtrisé), récurrence à deux pas, récurrence forte.

Nombres réels

- ⇒ Définitions : intervalles de $\mathbb{R}$, segment, majorant, minorant, plus grand et plus petit élément, borne supérieure et borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.
- ⇒ Valeur absolue d'un nombre réel : définition et propriétés ($|x| = \alpha$, $|x| \leq \alpha$, $|x| \geq \alpha$, $|xy|$, $\frac{|x|}{|y|}$, inégalités triangulaires)
- ⇒ Partie entière d'un nombre réel : définition, opérations.
- ⇒ Puissance entière et la racine carrée : définition, opérations. (Les puissances non entière n'ont pas été traitées.)
- ⇒ Identités remarquables : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.
- ⇒ Résolution d'équations :
 - Règles de transformation pour obtenir une équation équivalente, cas de la composition par une fonction strictement monotone. (cf exemple)

Remarques aux colleurs

- Veillez à ce que les récurrences soit particulièrement bien rédigées (cf exemple en annexe).
- Les élèves ont des difficultés en calcul. Il ne faut pas hésiter pas à mettre en question de cours des simplifications de puissances.

- Merci d'être exigeant sur la rédaction des résolutions d'équations (cf exemple en annexe)
- La résolution des équations polynomiale du second degré n'a pas été traitée en cours. Mais elle a déjà été revue plusieurs fois en TD.

Exemple de rédaction pour une récurrence

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, " $2^n > n$ ".

Pour $n \in \mathbb{N}$, note $\mathcal{R}(n)$ la propriété : " $2^n > n$ ".

Initialisation pour $n = 1$:

$2^1 = 2$ et on a bien $2 > 1$ donc $\mathcal{R}(1)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On suppose que $\mathcal{R}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $2^n > n$

Or $2^n > n \Leftrightarrow 2 \times 2^n > 2n \Leftrightarrow 2^{n+1} > n + n$

Or $n \geq 1$, on en déduit donc :

$2^{n+1} > n + 1$

On a montré que $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie

D'après le principe de récurrence (ou par récurrence), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$.

Exemple de rédaction pour une résolution d'équation

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2} = x - 4$

Etude du domaine de validité de l'équation :

Soit $x \in \mathbb{R}$ L'équation est valide si et seulement si $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

On résout l'équation sur $[-2, +\infty[$.

Soit $x \in [-2, +\infty[$,

1er cas : Si $x \in [-2, 4[$,

alors $x - 4 < 0$.

Dans ce cas l'équation n'a pas de solution puisqu'une racine carrée est un nombre positif.

2eme cas : Si $x \in [4, +\infty[$,

$\sqrt{x+2} = x - 4 \Leftrightarrow x + 2 = (x - 4)^2$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
avec $\sqrt{x+2} \in \mathbb{R}_+$ et $x - 4 \in \mathbb{R}_+$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 7$$

Seule la solution 7 est valide car $2 < 4$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{7\}$.