

Devoir Maison 1 - Deuxième partie corrigé

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 puis conjecturer u_n en fonction de n .

$$\text{On a } u_1 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, u_2 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \text{ et } u_3 = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{On conjecture que pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

2. Démontrer votre conjecture pour tout entier naturel n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{0+2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\text{Montrons que } u_{n+1} = \frac{n+2}{n+3}.$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2 - u_n} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{n+1}{n+2}} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{\frac{2(n+2) - (n+1)}{n+2}} \\ &= \frac{1}{\frac{n+3}{n+2}} \\ &= \frac{n+2}{n+3} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : 1 \leq u_n \leq 2$.

Initialisation : On a $u_1 = 2$ donc $1 \leq u_1 \leq u_2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On a $u_2 = \sqrt{u_0 + u_1} = \sqrt{2}$ donc $1 \leq u_2 \leq 2$ et $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Montrons que $1 \leq u_{n+2} \leq 2$.

On a par hypothèse de récurrence, $1 \leq u_n \leq 2$ et $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc par somme d'inégalités,

$$\begin{aligned} 2 &\leq u_n + u_{n+1} \leq 4 \\ \iff \sqrt{2} &\leq \sqrt{u_n + u_{n+1}} \leq \sqrt{4} \quad \text{par stricte croissance de la fonction racine carrée} \\ \implies 1 &\leq u_{n+2} \leq 2 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{2u_n + 3 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

2. En déduire par récurrence que $u_n \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geq 1$.

Initialisation : On a $u_0 = 1$ donc $u_0 \geq 1$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Montrons que $u_{n+1} \geq 1 \iff u_{n+1} - 1 \geq 0$.

D'après la question 1, $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.

De plus, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ donc $u_n + 1 \geq 2 \geq 0$. De même, $u_n + 2 \geq 0$. Ainsi, par quotient de termes positifs, $u_{n+1} - 1 \geq 0$. D'où $u_{n+1} \geq 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.