

Corrigé du Devoir Calculs

Exercice 1 - Un peu de calcul pour commencer

1.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{5 + \sqrt{7}}{6} \right)^4 \times \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{6} \right)^4 \\
 &= \left(\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{6} \right) \times \left(\frac{5 - \sqrt{7}}{6} \right) \right)^4 \\
 &= \left(\frac{25 - 7}{36} \right)^4 \\
 &= \left(\frac{18}{36} \right)^4 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\frac{1}{7} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{7} + \frac{5}{3}} \\
 &= \frac{\frac{3}{21} - \frac{28}{21}}{\frac{3}{21} + \frac{35}{21}} \\
 &= \frac{\frac{-25}{21}}{\frac{38}{21}} \\
 &= \frac{-25}{38}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}}{\left(2 + \frac{2}{3} \right) \times \frac{1}{5}} \\
 &= \frac{\frac{10}{15} - \frac{4}{15}}{\frac{8}{3} \times \frac{1}{5}} \\
 &= \frac{\frac{6}{15}}{\frac{8}{15}} \\
 &= \frac{2}{5} \times \frac{15}{8} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{(-5)^3 \times (-2)^4 \times 3}{25^3 \times (-3)^{-3}} \\
 &= \frac{2^4 \times 3^4}{5^3} \\
 &= \frac{6^4}{5^3}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 - Un peu de calcul pour continuer

Soit x un nombre réel.

1. $E = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
- 2.

$$\begin{aligned} F &= 4x^2 - 4x + 1 \\ &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 \\ &= (2x - 1)^2 \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{aligned} G &= (x + 9)(x - 5) + 2(-6x + 30) \\ &= (x + 9)(x - 5) - 12(x - 5) \text{ car } -6x + 30 = -6(x - 5) \\ &= (x - 5)[(x + 9) - 12] \\ &= (x - 5)(x - 3) \end{aligned}$$

- 4.

$$\begin{aligned} H &= 7 - (2x - 3)^2 \\ &= (\sqrt{7})^2 - (2x - 3)^2 \\ &= (\sqrt{7} - (2x - 3))(\sqrt{7} + (2x - 3)) \\ &= (\sqrt{7} - 2x + 3)(\sqrt{7} + 2x - 3) \end{aligned}$$

Problème 1 - Calcul

Partie A : Calcul littéral

1. On a d'après les propriétés de la racine cubique :

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} \\ &= \sqrt[3]{(10 + 6\sqrt{3})(10 - 6\sqrt{3})} \\ &= \sqrt[3]{10^2 - (6\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt[3]{100 - 108} \\ &= \sqrt[3]{-8} \\ &= -2 \text{ (car } (-2)^3 = -8). \end{aligned}$$

2. On a

$$\lambda^3 + \mu^3 = \left(\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}\right)^3 = 10 + 6\sqrt{3} + 10 - 6\sqrt{3} = 20.$$

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Avec $a = \lambda$ et $b = \mu$, on obtient

$$(\lambda + \mu)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 3\lambda\mu^2 + \mu^3 = \lambda^3 + \mu^3 + 3\lambda\mu(\lambda + \mu) = 20 - 6(\lambda + \mu).$$

Partie B : Revenons à nos moutons

1. Comme $A = \lambda + \mu$, la question précédente donne directement

$$A^3 = 20 - 6A \iff A^3 + 6A - 20 = 0.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-a)(x^2+2x+10) &= x^3+2x^2+10x-ax^2-2ax-10a \\ &= x^3+(2-a)x^2+(10-2a)x-10a.\end{aligned}$$

On veut que cette expression soit égale à $x^3+6x-20$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par identification, on a

$$\begin{cases} 2-a=0, \\ 10-2a=6, \\ -10a=-20. \end{cases} \iff a=2$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad x^3+6x-20 = (x-2)(x^2+2x+10)$$

3. L'équation $x^2+2x+10=0$ est une équation polynomiale du second degré. Son discriminant est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 10 = 4 - 40 = -36 < 0$. Comme $\Delta < 0$, cette équation n'admet aucune solution réelle.
4. D'après la question 1, $A^3+6A-20=0$,

$$\begin{aligned}A^3+6A-20=0 &\iff (A-2)(A^2+2A+10)=0 \\ &\iff A=2 \text{ ou } A^2+2A+10=0.\end{aligned}$$

Or A est un nombre réel, et on a montré à la question précédente que l'équation $x^2+2x+10=0$ n'a pas de solution réelle : $A^2+2A+10=0$ est donc impossible.

On en déduit que $A=2$.

Partie C : Allons un peu plus loin

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(x-\lambda)(x-\mu) &= x^2 - (\lambda+\mu)x + \lambda\mu \\ &= x^2 - Ax + \lambda\mu \\ &= x^2 - 2x - 2 \text{ en utilisant les résultats des questions précédentes}\end{aligned}$$

2. L'équation $x^2-2x-2=0$ est une équation polynomiale du second degré. Son discriminant est égal à $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12 > 0$. Cette équation a deux solutions

$$\frac{2-\sqrt{12}}{2} = 1-\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1+\sqrt{3}.$$

3. D'après ce qui précède, λ et μ sont les solutions de l'équation $x^2-2x-2=0$, c'est-à-dire $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Comme $10+6\sqrt{3} > 10-6\sqrt{3}$ et que la fonction racine cubique est croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\lambda > \mu$, donc $\lambda = 1+\sqrt{3}$ et $\mu = 1-\sqrt{3}$.

On a montré que $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$ et $\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}} = 1-\sqrt{3}$, et donc $A = \lambda + \mu = 2$.