

Corrigé du Devoir surveillé 1

Exercice 1 - Résolution d'(in)équations

- On sait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $|y| \geq 0$. L'inéquation proposée est toujours vraie. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 |x^2 - 4x| \leq 4 &\iff -4 \leq x^2 - 4x \leq 4 \\
 &\iff -4 \leq x^2 - 4x \text{ et } x^2 - 4x \leq 4 \\
 &\iff x^2 - 4x + 4 \geq 0 \text{ et } x^2 - 4x - 4 \leq 0 \\
 &\iff (x - 2)^2 \geq 0 \text{ et } x^2 - 4x - 4 \leq 0 \\
 &\iff x^2 - 4x - 4 \leq 0
 \end{aligned}$$

puisque un carré est toujours positif ou nul. Le discriminant du trinôme $x^2 - 4x - 4$ vaut 32 donc ses racines (réelles distinctes) valent :

$$\frac{4 - \sqrt{32}}{2} = 2 - 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad 2 + 2\sqrt{2}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = [2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}]}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{7x - 1}{2} \right| > 3 &\iff \frac{7x - 1}{2} < -3 \text{ ou } \frac{7x - 1}{2} > 3 \\
 &\iff 7x - 1 < -6 \text{ ou } 7x - 1 > 6 \\
 &\iff x < -\frac{5}{7} \text{ ou } x > 1
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{5}{7}[\cup]1, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons suivant les intervalles :

$$4 - x \geq 0 \iff x \leq 4$$

$$-1 + 2x \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$ 4 - x $	$4 - x$	$4 - x$	0	$-(4 - x)$
$ -1 + 2x $	$-(-1 + 2x)$	0	$-1 + 2x$	$-1 + 2x$

$$\star \text{ Si } x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right],$$

$$\begin{aligned}
 |4 - x| + |-1 + 2x| = 2 &\iff 4 - x + 1 - 2x = 2 \\
 &\iff -3x + 5 = 2 \\
 &\iff x = \frac{3}{3} = 1
 \end{aligned}$$

Comme $1 \notin \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$, 1 n'est pas une solution.

$$\star \text{ Si } x \in \left] \frac{1}{2}, 4 \right],$$

$$\begin{aligned} |4-x| + |-1+2x| = 2 &\Leftrightarrow 4-x-1+2x = 2 \\ &\Leftrightarrow x+3 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Comme $-1 \notin \left] \frac{1}{2}, 4 \right]$, -1 n'est pas une solution.

$$\star \text{ Si } x \in]4, +\infty[$$

$$\begin{aligned} |4-x| + |-1+2x| = 2 &\Leftrightarrow -4+x-1+2x = 2 \\ &\Leftrightarrow 3x = 7 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Comme $\frac{7}{3} \notin]4, +\infty[$ donc $\frac{7}{3}$ n'est pas solution.

L'ensemble des solutions de l'équation est vide

Exercice 2 - D'autres résolutions d'(in)équations

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x-1}{x-2} \leq -1 &\Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{x-2} + 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+x-1+x-2}{x-2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{x-2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{x-2} \leq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$(x-1)(x+3)$	+	0	-	0	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$\frac{(x-1)(x+3)}{x-2}$	-	0	+	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\mathcal{S} =]-\infty; -3] \cup [1; 2[.$$

2. (a) On a $25 \leq 29 \leq 36$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée, on a :

$$\sqrt{25} \leq \sqrt{29} \leq \sqrt{36} \Leftrightarrow 5 \leq \sqrt{29} \leq 6.$$

(b) Soit (E) l'équation $\sqrt{2x^2+x-6} = x+1$.

Domaine de validité : il faut que $2x^2+x-6 \geq 0$.

Le discriminant est $\Delta = 1+48 = 49 > 0$ donc les solutions de l'équation $2x^2+x-6 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}.$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2+x-6$	+	0	0	+

Ainsi, on résout (E) sur $\mathcal{D}_E =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Soit $x \in \mathcal{D}_E$,

- 1^{er} cas : $x \leq -2$

dans ce cas, on a $x+1 < 0$ et $\sqrt{2x^2+x-6} \geq 0$. Donc x n'est pas solution.

- 2^e cas : $x \geq \frac{3}{2}$

La fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$(E) \iff 2x^2 + x - 6 = (x+1)^2 \iff 2x^2 + x - 6 = x^2 + 2x + 1 \iff x^2 - x - 7 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 1 + 28 = 29 > 0$ donc les solutions de l'équation sont $x_1 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$.

$$5 \leq \sqrt{29} \leq 6 \iff 6 \leq 1 + \sqrt{29} \leq 7 \iff 3 \leq \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \leq \frac{7}{2} \text{ donc } \frac{1 + \sqrt{29}}{2} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{29}}{2} < 0 \text{ donc } \frac{1 - \sqrt{29}}{2} < \frac{3}{2}.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \right\}$.

Exercice 3 - Une première suite

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = \frac{1}{2n+1}$

Initialisation

Pour $n = 0$:

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2 \times 0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

On a bien $u_0 = \frac{1}{2 \times 0 + 1}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par définition de la suite, on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$

Donc par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{\frac{1}{2n+1}}{2 \times \frac{1}{2n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2 + 2n + 1}{2n+1}} \\ &= \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

Or $2n+3 = 2(n+1) + 1$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion Par principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = \frac{1}{2n+1}$$

Problème 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les jeunes rameaux de l'année $n+1$ sont ceux produits par les rameaux adultes de l'année précédente et il y en a deux par rameau adulte, soit $2A_n$. D'où $J_{n+1} = 2A_n$.

Les rameaux adultes de l'année $n+1$ sont les rameaux adultes de l'année précédente, soit les A_n ainsi que les jeunes rameaux de l'année précédente qui deviennent adultes au bout d'un an, soit les J_n . D'où $A_{n+1} = A_n + J_n$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A_{n+2} = A_{n+1} + J_{n+1} = A_{n+1} + 2A_n$.

3. $A_1 = A_0 + J_0 = 1$,

$$A_2 = A_1 + 2A_0 = 1 + 2 = 3,$$

$$A_3 = A_2 + 2A_1 = 3 + 2 = 5,$$

$$A_4 = A_3 + 2A_2 = 5 + 6 = 11,$$

$$A_5 = A_4 + 2A_3 = 11 + 10 = 21.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= A_{n+2}A_n - A_{n+1}^2 \\
 &= (A_{n+1} + 2A_n)A_n - A_{n+1}^2 \\
 &= A_{n+1}A_n + 2A_n^2 - A_{n+1}^2 \\
 &= A_{n+1}(A_n - A_{n+1}) + 2A_n^2 \\
 &= A_{n+1}(-J_n) + 2A_n^2 \\
 &= A_{n+1}(-2A_{n-1}) + 2A_n^2 \\
 &= -2(A_{n+1}A_{n-1} - A_n^2) \\
 &= -2D_n
 \end{aligned}$$

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: $D_n = (-1)^{n-1}2^n$.

Initialisation : $D_1 = A_2A_0 - A_1^2 = 3 \times 1 - 1^2 = 2$ et $(-1)^0 \times 2^1 = 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Montrons que $D_{n+1} = (-1)^n 2^{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} &= -2D_n \\
 &= -2 \times (-1)^{n-1}2^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= -1 \times (-1)^{n-1} \times 2 \times 2^n \\
 &= (-1)^n 2^{n+1}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $A_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

Initialisation : $\frac{2^{0+1} + (-1)^0}{3} = \frac{2+1}{3} = 1 = A_0$ et $\frac{2^{1+1} + (-1)^1}{3} = \frac{4-1}{3} = 1 = A_1$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Montrons que $A_{n+2} = \frac{2^{n+3} + (-1)^{n+2}}{3}$.

On a :

$$\begin{aligned}
 A_{n+2} &= A_{n+1} + 2A_n \\
 &= \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3} + 2 \times \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{2^{n+2} + 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2 \times (-1)^n}{3} \\
 &= \frac{2 \times 2^{n+2} + (-1)^n(-1+2)}{3} \\
 &= \frac{2^{n+3} + (-1)^n}{3} \\
 &= \frac{2^{n+3} + (-1)^{n+2}}{3} \quad \text{car } (-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Problème 2

1. On a en langage mathématique avec des quantificateurs et des opérateurs logiques :

$$R \iff \exists h \in P, h \in N \iff \exists h \in H, h \in P \text{ et } h \in N$$

$$Q \iff (\forall h \in H, h \in C \implies (h \in A \text{ et } h \in B))$$

Attention : la proposition « $h \in A \cap B$ » est équivalente à « $h \in A$ et $h \in B$ » mais elle utilise une opération sur des ensembles (l'intersection $\cap$) et non un opérateur logique (le « et ») comme demandé par l'énoncé.

2. Réécrire la proposition Q en langage mathématique à l'aide d'opérations sur des ensembles.
On a en langage mathématique avec des opérations sur des ensembles :

$$Q \iff \forall h \in C, h \in A \cap B \iff C \subset A \cap B$$

3. On a en langage mathématique :

$$\begin{aligned} \text{non}(R) &\iff (\forall h \in P, \text{non}(h \in N)) \iff (\forall h \in P, h \notin N) \iff (\forall h \in H, h \notin P \text{ ou } h \notin N) \\ \text{non}(Q) &\iff \exists h \in H, \text{non}(h \in C \implies (h \in A \text{ et } h \in B)) \\ &\iff \exists h \in H, h \in C \text{ et } \text{non}(h \in A \text{ et } h \in B) \\ &\iff \exists h \in H, h \in C \text{ et } (h \notin A \text{ ou } h \notin B) \\ &\iff \exists h \in C, h \notin A \text{ ou } h \notin B \end{aligned}$$

En français on a que la négation de R est « **Aucun échantillon d'ADN des percherons n'est porteur du gène noir.** », et la négation de Q est « **Il existe un échantillon d'ADN qui, d'une part, a été prélevé sur un comtois et, d'autre part, n'est pas porteur du gène alezan ou n'est pas porteur du gène bai (ou n'est pas porteur des deux gènes).** »

4. La contraposée de Q est donnée en langage mathématique par :

$$(\forall h \in H, \text{non}(h \in A \text{ et } h \in B) \implies \text{non}(h \in C)) \iff (\forall h \in H, (h \notin A \text{ ou } h \notin B) \implies h \notin C)$$

ce qui donne en français : « **Si un échantillon d'ADN n'est pas porteur du gène alezan ou n'est pas porteur du gène bai (ou n'est pas porteur des deux gènes), alors l'analyse n'a pas été pratiquée sur un comtois.** »

La réciproque de Q est donnée en langage mathématique par :

$$\forall h \in H, (h \in A \text{ et } h \in B) \implies h \in C$$

ce qui donne en français : « **Si un échantillon d'ADN est porteur du gène alezan et du gène bai, alors l'analyse a été pratiquée sur un comtois.** »

5. (a) **Vraie.**
(b) **Vraie.**
(c) **Fausse.**
(d) **Vraie.**