

Rédaction en mathématiques

Il est primordial de bien rédiger en mathématiques et ceci pour plusieurs raisons :

- Etre compris par le lecteur/correcteur sans que celui-ci n'ait à faire d'efforts (donc espérer avoir plus de la moitié des points à la question).
- Structurer sa pensée. Bien rédiger oblige à la rigueur et donc à clarifier vos idées.
- Eviter des erreurs de logiques dans vos copies et détecter les pièges de l'énoncé.

Une copie bien rédigée est **une copie où se trouve le strict nécessaire**. Ce n'est pas au correcteur de faire le tri. **Eliminer l'inutile et seulement l'inutile.**

1 Structure de la rédaction

Dans l'idéal chaque réponse doit se décomposer en :

- Une introduction
- Le raisonnement
- La conclusion

Dans l'introduction, il faut :

- Mettre le numéro de la question,
- Introduire toutes les variables utiles au commencement de votre réponse.
- Indiquer les hypothèses utiles (et seulement) à la question clairement et **succintement** pour donner une base au raisonnement.

Dans la conclusion, on rappelle le résultat que l'on a prouvé. On l'encadre.

Dans le raisonnement, il faut

- Préciser le type de raisonnement quand celui-ci n'est pas "classique". Par exemple raisonnement par l'absurde, par récurrence ou par contraposée.
- Bien mettre en avant les articulations logiques : "si...", "alors..." etc.
- Toute affirmation, toute ligne de calcul doit être justifiée par une question antérieure ou par un théorème précis du cours.
- Quand le raisonnement/la réponse sera longue ; en plusieurs étapes, annoncer ce que vous faites. Mettre des "Montrons que ..." ou des "il nous reste à prouver que...". Bien faire apparaître les cas dans une disjonction de cas.

2 Quelques précisions sur la rédaction

2.1 Introduire ce dont on parle

Toutes les variables, notations (non usuelles ou non données dans l'énoncé) ou objets que vous écrivez dans votre rédaction doivent être définis : est-ce un réel, un entier naturel, une fonction (préciser l'ensemble de définition dans ce cas), une suite etc ?

2.1.1 Que signifie " $\forall$ " (pour tout) et son emploi

Le symbole $\forall$ signifie : pour tout, quelque soit.

Ainsi un résultat est-il vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ s'il est vrai pour n'importe quel réel.

Exemple :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, $n^2 - 4n + 3 \geq 0$: le résultat est vrai pour $n = 3$, $n = 4$ etc.
- Considérons la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 4x$$

La formule est valable pour n'importe quel réel x (π , $\frac{3}{2}$, $-2...$)

Exercice : En utilisant le premier exemple compléter :

$$\text{Pour tout } n \in \dots (n+1)^2 - 4(n+1) + 3 \geq 0$$

- Il est interdit d'utiliser le symbole $\forall$ dans une phrase en français (on le remplace par "pour tout").
- Attention le symbole $\forall$ (ou l'expression "pour tout") ne permet pas de définir des objets pour l'ensemble de la rédaction, seulement pour la phrase mathématique dans laquelle il se trouve.

Par exemple pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante :

Rédaction erronée : deuxième ligne n n'est pas défini	Rédaction correcte
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$

2.1.2 Introduire une variable

Pour créer, introduire, fixer un objet, on utilise : "soit..." (verbe être au subjonctif présent). Par exemple :

- "Soit $x \in \mathbb{R}$ " : dans toute la suite de votre rédaction x sera un réel quelconque fixé (choisi au hasard parmi les réels).
- "Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$: pour définir choisir une fonction croissante quelconque définie sur $\mathbb{R}^+$

Astuces :

- Quand dans une question on vous demande de prouver un résultat "pour tout etc.", votre réponse commencera le plus souvent par "soit..."

Par exemple :

- Prouver que pour tout réel x , $(x+9)(2x+5) = 2x^2 + 23x + 45$. On commence par :

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}, (x+9)(2x+5) = \dots$$

- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 4n + 3$. Montrer que la suite u est croissante. (c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$).

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} - u_n = \dots$$

L'idée de cette rédaction est la suivante : on veut prouver un résultat pour tout $x \in \mathbb{R}$ (par exemple) :

- On choisit/fixe x un réel quelconque ("soit $x \in \mathbb{R}$ ")
- On prouve le résultat pour ce x fixé (partie raisonnement/calcul)
- Comme le résultat a été prouvé pour un réel x quelconque on a en fait prouvé le résultat pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on peut conclure).
- Pour résoudre une équation ou une inéquation sur un ensemble on commence toujours par choisir une variable dans cet ensemble. Par exemple :
 - Déterminer $x \in [0, 5]$ tel que $x^2 - 1 = 0$. On peut commencer par :

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in [0, 5], \\ x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \dots \end{aligned}$$

Exercices : Ecrire les introductions de :

- Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ $3x + 2 \geq 0$
- Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln(x) \leq x - 1$ (introduire la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$)

2.1.3 Donner un nom, introduire une notation

On veut parfois définir une nouvelle variable dépendante de variables précédentes ou donner une valeur à une variable.

Par exemple on vous demande de prouver qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que x et y ne soient pas des entiers et $x + y \in \mathbb{Z}$. Vous ne pouvez pas commencer par "soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$...". On rédige en fait :

"on pose $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. Ce ne sont pas des entiers mais $x + y = 1$ et $1 \in \mathbb{Z}$ ".

2.2 Mettre en évidence des articulations logiques

Pour écrire un raisonnement on utilise des connecteurs logiques tels que "donc", "si", "alors"... et parfois des symboles mathématiques $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$. Ces derniers symboles, ayant une signification très précise, ne sont à utiliser qu'avec parcimonie et en général que dans une suite d'équations ou d'inéquations. De façon plus globale bien faire apparaître le type de raisonnement utilisé, en le citant si besoin (raisonnement par l'absurde, disjonction de cas, contraposée...).

2.2.1 Un peu de logique

On appelle **proposition** un assemblage de mots auquel on peut **donner une valeur de vérité** : vraie ou fausse.

Exemples :

- "2 est un entier impair" est une proposition fausse.
- " $1 + 2 = 3$ " est une proposition vraie.
- " $x^2 + 1$ " n'est pas une proposition

On peut définir l'**implication** et l'**équivalence** entre deux propositions : il faut bien faire la différence.

- $P \Rightarrow Q$ (P implique Q) signifie que **si P est vraie alors Q est vraie**.
 - Comme la fêche l'indique, pour écrire le symbole $\Rightarrow$ il faut s'assurer que, si la proposition de gauche est vraie celle de droite aussi : on peut "passer" de gauche à droite.
 - Une implication peut être remplacée par "si... alors..."
- $P \Leftrightarrow Q$ (P équivaut à Q) signifie que **P est vraie si et seulement si Q est vraie**.
 - Comme la fêche l'indique, pour écrire le symbole $\Leftrightarrow$ il faut s'assurer que, si la proposition de gauche est vraie celle de droite aussi **et** que si la proposition droite est vraie celle de gauche aussi : on peut "passer" de gauche à droite mais aussi de droite à gauche.
 - Une équivalence est une double implication (implication dans les deux sens)
 - Une équivalence peut être remplacée par "si et seulement si"

Exemples :

- Si $ABCD$ est un carré alors $ABCD$ est un quadrilatère possédant 4 angles droits. La propriété de gauche implique celle de droite mais il n'y a pas équivalence car un quadrilatère possédant 4 angles droits n'est pas nécessairement un carré (penser aux rectangles) : la réciproque est fausse.
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$. On a équivalence entre les deux propositions : de gauche à droite c'est le théorème de Pythagore et de droite à gauche sa réciproque.

Attention :

- A chaque écriture de $\Leftrightarrow$ il faut s'assurer que l'on a le droit de le faire
- Ces symboles ne sont pratiquement utilisés que dans des suites d'équations ou d'inéquations.
- Dans les raisonnements, on utilisera "donc", "équivaut à", "or", "si... alors...", "si et seulement si" en toute lettre.
- Ne pas confondre $\Leftrightarrow$ et $=$. Ce sont deux choses complètement différentes. Un équivalent lie deux "propositions" dont on peut dire qu'elles sont vraies ou fausses. Le signe $=$ se placent entre deux objets mathématiques (nombres, fonctions etc.)

Exercice : Compléter par $=$, $\Leftrightarrow$ ou $\Rightarrow$, avec x réel

- $(2x + 1)^2 \cdots 4x^2 + 4x + 1$
- $2x + 3 = 5 \cdots 2x = 2$
- $x = 2 \cdots x^2 = 4$
- $4x^2 - 1 \cdots (2x - 1)(2x + 1)$

Pour éviter des phrases sans sens et des erreurs il est toujours utile de lire à voix haute (dans sa tête) ce que l'on écrit.

Conseil méthodologique : Quand vous apprenez une propriété/théorème du cours, repérez si la propriété est une équivalence ou seulement une implication.

De même, dans un énoncé, il faut repérer les questions demandant de prouver une implication et celles demandant de prouver une équivalence.

2.3 Utilisation de théorèmes

Quand on utilise un théorème il faut :

- Montrer de façon explicite que l'on **vérifie avec précision toutes les hypothèses** du théorème et **seulement celles-là**.
- Que l'on puisse comprendre quel théorème est utilisé (s'il a un nom le donner).

3 Rédactions problématiques

3.1 Mélange des genres

On ne mélange pas le français avec les mathématiques. Les symboles $\forall$ ou $\exists$ (il existe) ne peuvent, par exemple, pas se trouver au milieu d'une phrase en français. La **seule** exception est le symbole $\in$ et dans certains cas $\geq$, $\leq$, $<$ ou $>$. On n'utilise **pas** non plus d'abréviations.

Exercice : Corriger de deux façons la rédaction suivante :

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$ la somme de m et n est un entier.

3.2 Fausses notations classiques

Il faut prendre garde aux notations non universellement reconnues.

Exercice : Corriger les rédactions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 2 = 0$.

Solution proposée : $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ donc $S = \{1, -2\}$

3.3 Précision des termes

Il faut être précis, connaître ses définitions et savoir de quoi on parle : par exemple seule une fonction ou une suite peuvent être croissantes, un segment n'est pas une longueur, un vecteur n'est pas une longueur ou un segment...

Exercice : Corriger les rédactions suivantes :

1. Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$ défini sur $\mathbb{R}$, $f(x)$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 0$.

2. On considère trois points A , B et C , du plan tels que $[AB] = \frac{1}{2}[AC]$.

4 Exercices - corriger les rédactions

Exercice :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$.

Rédaction : Soit $f(x) = \sin(x) - x$.

$$f'(x) = \cos(x) - 1$$

et $\cos(x) - 1 \leq 0$. Donc $f(x)$ est décroissante.

$f(0) = 0$. Donc $f(x) \leq 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $\sin(x) \leq x$.

Exercice :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6 = 3(x-1)(x+2)$.

Rédaction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 6 &\Leftrightarrow 4x^2 + 2x + \frac{1}{4} - x^2 + x - \frac{1}{4} - 6 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 \end{aligned}$$

$$3(x-1)(x+2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6$$

CQFD

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x - 3 \geq 1$.

Rédaction :

$$-2x - 3 \geq 1$$

$$-2x \geq 4$$

$$x \leq -2$$

$$S =]-\infty, -2].$$