# Devoir Maison 2 - corrigé

## Exercice 1

1. Vérifions que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$ :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 &\iff 2\sqrt{2} < 1+\sqrt{5} < 4 \\ &\iff (2\sqrt{2})^2 < (1+\sqrt{5})^2 < 4^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est str croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff 8 < 6+2\sqrt{5} < 16 \\ &\iff 1 < \sqrt{5} < 5.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi et

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[.$$

2. On utilise ici le théorème de la bijection :
   - cos est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ ;
   - cos est strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ ;
   - $\lim\limits_{t\to 0} \cos(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{4}} \cos(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   D'après le théorème de la bijection, cos réalise donc une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ vers $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.

   D'après la question 1, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$. Donc le réel $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ a donc un unique antécédent par cos dans $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$. L'énoncé le note $\alpha$.

3. On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ &= 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 \\ &= \frac{2\sqrt{5}-2}{8} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}.\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\cos(4\alpha) &= 2\cos^2(2\alpha) - 1 \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{6-2\sqrt{5}}{8} - 1 \\ &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ &= -\cos(\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\cos(4\alpha) = -\cos(\alpha).}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(4x) = -\cos(x) &\iff \cos(4x) = \cos(\pi - x)\\ &\iff \begin{cases}\exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi - x + 2k\pi\\ \text{ou}\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = x - \pi + 2k\pi\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2k\pi}{5}\\ \text{ou}\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}.\end{cases}\end{aligned}$$

Faire le graphe.

5. D'après la question 4, la seule solution de l'équation dans $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ étant $\frac{\pi}{5}$, on en conclut que

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{5}.}$$

6. On peut donc maintenant résoudre l'équation initiale.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Toujours à l'aide de la même méthode :

$$\begin{aligned}\cos(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\\ &\iff \begin{cases}\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi\\ \text{ou}\\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\dfrac{\pi}{5} + 2k\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

   On obtient donc :

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

## Exercice 2 : Informatique

1. 
```
def croissance(h,eau):
    if eau >= 200:
        return h + 3
    elif eau >= 100:
        return h + 1
    else:
        return h
```

2. 
```
def evolution(N,c):
    if c >= 5:
        nouvelle = 0.7*N
    else:
        nouvelle = 1.2*N
    variation = nouvelle - N
    return (nouvelle, variation)
```