Corrigé du Devoir Maison 3

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{La fonction f est définie en } x \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-9} \geq 0 \text{ car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^+ \\ x^2-9 \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-9} \geq 0 \\ x \neq 3 \text{ et } x \neq -3 \end{cases}$$

On étudie le signe du quotient à l'aide d'un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x^2-9}$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

Donc la fonction f est définie sur $D =]-3,-1] \cup]3,+\infty[$.

Soit $x \in D$, $x \neq 0$ $\dfrac{x+1}{x^2-9} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{9}{x}}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2-9} = 0$ et par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On a $f(-1) = 0$. Etudions les limites en -3 et 3.

Soit $x \in]-3,-1]$, $x^2-9 < 0$ donc $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+1}{x^2-9} = +\infty$. Par composition $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = +\infty$.

Soit $x \in]3,+\infty]$, $x^2-9 > 0$ donc $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x+1}{x^2-9} = +\infty$. Par composition $\lim\limits_{x\to3} f(x) = +\infty$.

2. Réécrivons $g(x) = e^{x\ln(5+x)}$. La fonction exponentielle et la fonction $x \mapsto x$ sont définies sur $\mathbb{R}$. La fonction logarithme étant définie sur $\mathbb{R}_*^+$, la fonction g est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $x+5 > 0$. Donc g est définie sur $]-5,+\infty[$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+5) = +\infty$ et donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-5} \ln(x+5) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-5} x\ln(x+5) = +\infty$. Donc par composition $\lim\limits_{x\to-5} g(x) = +\infty$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{La fonction h est définie en } x \Leftrightarrow x^2-5x+4 > 0 \text{ car la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est define sur} \mathbb{R}_*^+$$

Les racines de x^2-5x+4 sont 1 et 4. Le coefficient dominant étant positif, $x^2-5x+4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$. Donc la fonction h est définie sur $]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2-5x+4 = x^2\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5x+4 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2-5x+4 = +\infty$. Donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} x^2-5x+4 = \lim\limits_{x\to3} x^2-5x+4 = 0$ et le polynôme est positif sur $]-\infty,1[\cup]3,+\infty$. Donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

Exercice 2.

1. L'inéquation est valide si et seulement si $x^2-1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.
   Soit $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. Alors

   ⋆ Si $x \in]-\infty,-1]$, alors $x-1<0$ et comme $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, tous les x de l'intervalle $]-\infty,-1]$ sont solutions.

   ⋆ Supposons maintenant que $x \in [1,+\infty[$. Comme la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$ et $x-1 \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1} > x-1 &\iff \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 > (x-1)^2\\ &\iff x^2-1 > x^2-2x+1\\ &\iff x > 1\end{aligned}$$

   Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est }]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f \text{ est définie en } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \mapsto \sqrt{x^2-1}+1-x \text{ est définie en } x \\ \sqrt{x^2-1}+1-x > 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in]-\infty,-1] \cup [1+\infty[\text{ d'après la question précédente} \\ \sqrt{x^2-1} > x-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in]-\infty,-1] \cup [1+\infty[\\ x \in]-\infty,-1]\cup]1+\infty[\text{ d'après la question précédente} \end{cases}$$

   Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty,-1]\cup]1+\infty[}$

   (b) On utilise la structure conditionnelle if/else :

```
def f(x):
  if ((x<=-1) or (x>1)) :
    print('valeur exacte')
  else :
    print('mauvaise valeur')
```

   (c) On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1} = +\infty$ donc par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x^2-1}+1-x = 0^+$ donc comme $\lim\limits_{X\to0^+}\ln(X) = -\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty}$.
   On utilise l'expression conjuguée pour trouver la limite en $+\infty$:

$$\begin{aligned}\forall x>1, \quad \sqrt{x^2-1}+1-x &= \frac{(\sqrt{x^2-1}+1-x)(\sqrt{x^2-1}-1+x)}{\sqrt{x^2-1}-1+x}\\ &= \frac{x^2-1-(1-x)^2}{\sqrt{x^2-1}-1+x}\\ &= \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-1}-1+x}\\ &= \frac{2x-2}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}-1+x}\\ &= \frac{2x-2}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1+x}\\ &= \frac{2x-2}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}+1)}\\ &= \frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}+1}\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+1-x=1$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

De plus, $\boxed{f(-1)=\ln(2)}$.