Devoir Maison 1 - Première partie

- ⋆ Soignez la présentation.
- ⋆ Chaque conclusion doit être encadrée !
- ⋆ Soyez précis dans votre rédaction, c'est fondamental de travailler ce point dès l'entrée en classe préparatoire.
- ⋆ Les devoirs maison ont pour objectif de vous entraîner et ne sont pas notés. Faire appel à une intelligence artificielle dans ce cadre est une ineptie.

Problème 1 : Calcul

On rappelle que la racine cubique d'un nombre x est l'unique nombre y tel que $y^3 = x$. La racine cubique de x est notée $\sqrt[3]{x}$.
Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$ et $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$

Partie A : Questions préliminaires

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}.$$
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = \sqrt[3]{x^2}.$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}.$$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Partie B : Racines cubiques

4. Soit
$$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} \quad \text{et} \quad b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$
Calculer ab et $a^3 - b^3$.
5. On pose désormais
$$A = a - b = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$
Calculer A^3 et montrer que
$$A^3 + 3A - 14 = 0.$$
6. Déterminer trois réels α, β et γ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x^3 + 3x - 14 = (x-2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$
En déduire une factorisation de $x^3 + 3x - 14$.
7. En déduire que A vaut 2.
8. En déduire les valeurs de a et b.