BCPST1

Corrigé du Devoir Surveillé 2

Exercice 1.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f \text{ est définie en } x_0 \iff \begin{cases} x \mapsto x^2-4 \text{ est définie en } x_0 \\ x \mapsto x-3 \text{ est définie en } x_0 \\ x_0 - 3 \neq 0 \\ \frac{{x_0}^2-4}{x_0-3} \geq 0 \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \text{ (fonction polynomiale)} \\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ (fonction affine)} \\ x_0 \neq 3 \\ \frac{{x_0}^2-4}{x_0-3} \geq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-4}{x-3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

La fonction f est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f = [-2;2] \cup]3;+\infty[}$

2. On calcule $f(-2)$ et $f(2)$. $\boxed{f(-2) = f(2) = \sqrt{0} = 0.}$
   - Limite en 3 :
     $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 4 = 5$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x - 3 = 0$.
     Or pour tout $x \in]3;+\infty[$, $x-3>0$, donc $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-4}{x-3} = +\infty$.
     De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$
     Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty}$
   - Limite en $+\infty$: Soit $x \in]3;+\infty[$, $\dfrac{x^2-4}{x-3} = \dfrac{x^2}{x} \cdot \dfrac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = x \cdot \dfrac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$.
     Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{4}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{x} = 1$.
     Et comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ si } \begin{cases} x \mapsto x^2-4 \text{ est dérivable en } x_0 \\ x \mapsto x-3 \text{ est dérivable en } x_0 \\ x_0 - 3 \neq 0 \\ \frac{{x_0}^2-4}{x_0-3} > 0 \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

$$\text{si } \begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \text{ (fonction polynomiale)} \\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ (fonction affine)} \\ x_0 \neq 3 \\ \frac{{x_0}^2-4}{x_0-3} > 0 \end{cases}$$

En réutilisant les résultats de la question 1, on obtient que la fonction f est dérivable sur $\boxed{]-2;2[\cup]3;+\infty[}$

$\forall x \in]-2;2[\cup]3;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2x(x-3)-(x^2-4)}{(x-3)^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-4}{x-3}}} = \dfrac{x^2-6x+4}{2(x-3)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-4}}$

On obtient $\boxed{\forall x \in]-2;2[\cup]3;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{x^2-6x+4}{2(x-3)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-4}}}$

Exercice 2.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{x} &= \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+4}} \\ &= \frac{x+4-(3x+4)}{x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+4}\right)} \\ &= \frac{-2x}{x\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+4}\right)} \\ &= \frac{-2}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+4}\right)}\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+4}+\sqrt{3x+4} = 4$. On obtient que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{x} = -\frac{1}{2}}$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, par définition du sinus, on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Comme $x^3 < 0$, on obtient $-\frac{1}{x^3} \geq \frac{\sin(x)}{x^3} \geq \frac{1}{x^3}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x^3} = 0}$

(c) Par définition de la puissance non entière, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}\ln(x)}$

Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln(x) = 0$.

Comme $\lim\limits_{X\to 0} \mathrm{e}^X = 1$, on obtient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{x}} = 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x) - \sqrt{3}\sin x = 1 &\iff 2\big(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\big) = 1 \\ &\iff \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos(x)\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos(x+\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \\ &\iff x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.}$

3.
```
from random import randint
def tirage():
    a= randint(1,10)
    if a<=3 :
        return 1
    else :
        return 0
```

Exercice 3.

1. ⋆ Déterminons le domaine de validité $\mathcal{D}$ de l'inéquation. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{D} &\iff 2x+1 \geqslant 0 \qquad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff x \geqslant -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. On distingue deux cas.

⋆ **Premier cas :** $x \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right]$**.** La fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{2x+1} \in \mathbb{R}_+$ et $1-x \in \mathbb{R}_+$ (car $x \leqslant 1$) donc

$$\sqrt{2x+1} > 1-x \iff 2x+1 > (1-x)^2 \iff x^2 - 4x < 0 \iff x(x-4) < 0$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left]-\frac{1}{2}, 1\right] \cap]0,4[=]0,1]$.

⋆ **Deuxième cas :** $x \in]1, +\infty[$**.** Alors $\sqrt{2x+1} > 0$ tandis que $1-x < 0$ (puisque $x > 1$) donc l'inégalité $\sqrt{2x+1} > 1-x$ est vraie et donc x est solution.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0,1] \cup]1, +\infty[=]0, +\infty[$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est définie en } x &\iff \begin{cases} 2x+1 \geqslant 0 & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+ \\ \sqrt{2x+1} + x - 1 > 0 & \text{car } x \mapsto \ln x \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} > 1-x \end{cases} \\ &\iff x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap]0, +\infty[\end{aligned}$$

d'après la question 1. Finalement,

le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

(b) On utilise les instructions conditionnelles `if` et `else` pour écrire ce programme. Le module `math` permet d'importer le logarithme népérien.

```
from math import *
def f(x):
    if (x>=-1/2) and (sqrt(2*x+1)+x-1>0) :
        return True
    else :
        return False
```

Remarque : on peut remplacer la condition `sqrt(2*x+1)+x-1>0` par `x>0` (puisqu'on a trouvé le domaine de définition de f à la question précédente) et le module math est alors inutile.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } x \text{ si } &\begin{cases} 2x+1 > 0 & \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \\ \sqrt{2x+1} + x - 1 > 0 & \text{car } x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases} \\ \text{si } &\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} > 1-x \end{cases} \\ \text{si } x \in &\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap]0, +\infty[\end{aligned}$$

d'après la question 1. Finalement,

le domaine de dérivabilité de f est $\mathcal{D}'_f =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+1}} + 1}{\sqrt{2x+1} + x - 1} = \frac{1 + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}(\sqrt{2x+1} + x - 1)}$$

(d) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt{2x+1} + x - 1 > 0$. De plus, $\sqrt{2x+1} > 0$, $1 + \sqrt{2x+1} > 0$ et donc $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau de variations de f suivant sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0		$+\infty$
f	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x+1} + x - 1\right) = +\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty}$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sqrt{2x+1} + x - 1\right) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty}$.

Exercice 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f \text{ est définie en } x \iff \begin{cases} x \mapsto \sin(x) \text{ est définie en } x \\ x \mapsto 1 + \cos(x) \text{ est définie en } x \\ 1 + \cos(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \\ x \notin \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

2.
```
from math import *
def f(x):
    if 1+cos(x) != 0 :
        return sin(x)/(1+cos(x))
    else :
        return ("erreur")
```

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$, $x - 2\pi \in \mathcal{D}_f$ et

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = f(x)$$

car les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$

4. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{1 + \cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{1 + \cos(x)} = -f(x)$$

car la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.
Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f \text{ est dérivable en } x \text{ si } \begin{cases} x \mapsto \sin(x) \text{ est dérivable en } x \\ x \mapsto 1 + \cos(x) \text{ est dérivable en } x \\ 1 + \cos(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{si } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \\ x \notin \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}}$

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

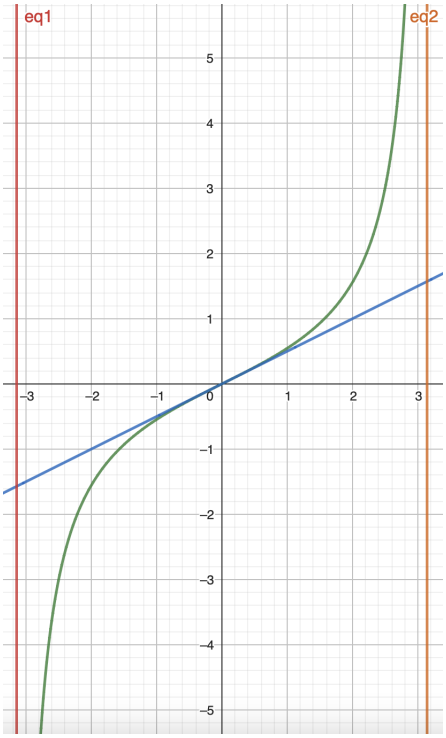
$$f'(x) = \frac{\cos(x)(1+\cos(x)) + \sin(x)\sin(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1}{1+\cos(x)} > 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;\pi[.}$

6. L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Autrement dit, $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 0.}$
7. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

   Donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1} = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = -\infty$

   $\boxed{\text{La courbe de } f \text{ admet donc une asymptote verticale d'équation } x = \pi.}$
9. On trace la tangente en 0 et l'asymptote en $x = \pi$. On trace la courbe sur $[0;\pi[$ puis on complète par symétrie centrale.



Problème 5.

Partie A : un calcul de cosinus et sinus

1. La formule de duplication du cosinus est : $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1}$. On en déduit que

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta)^2 = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$$

2. Pour $\theta = \dfrac{3\pi}{8}$, on a

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Comme $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) \geqslant 0$ (puisque $\dfrac{3\pi}{8} \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$), on a $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$ et donc

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

3. On sait que
$$\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 = 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 = 1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$
Comme $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \geqslant 0$, on a $\boxed{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

Partie B : localisation des racines de ($\heartsuit$)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 24x^2 - 6 = 6(2x-1)(2x+1)$$
On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(-\frac{1}{2})$	↘	$f(\frac{1}{2})$	↗	$+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3\left(8 - \frac{6}{x^2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{x^3}\right) = \pm\infty$.

2. On sait que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty,-1]$ (puisqu'elle l'est sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ d'après la question précédente) donc
$$\forall x \in]-\infty,-1], \qquad f(x) \leqslant f(-1) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(x) \leqslant -2 - \sqrt{2-\sqrt{2}} < 0$$
Donc $\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur l'intervalle }]-\infty,-1]}$.

3. D'après la question 2., on sait que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a $f(x) \geqslant f(1)$ (puisque f est croissante sur $[1,+\infty[$), c'est-à-dire $f(x) \geqslant 2 - \sqrt{2-\sqrt{2}} > 0$. Donc f ne s'annule pas sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Autrement dit, $\boxed{\text{l'équation } (\heartsuit) \text{ n'admet pas de solution dans l'intervalle } [1,+\infty[}$.

4. **Étude sur l'intervalle** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$**.**

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

De plus, $f\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = \left[-2-\sqrt{2-\sqrt{2}}, 2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$.

Comme $-2-\sqrt{2-\sqrt{2}} < 0 < 2-\sqrt{2-\sqrt{2}}$, on a $0 \in f\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation ($\heartsuit$) admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que x est solution de ($\heartsuit$). D'après les questions 2., 3. et 4. de la **Partie B**, on sait que $x \in [-1,1]$. La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = x$. Donc
$$\boxed{\text{pour toute solution } x \text{ de } (\heartsuit), \text{ il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \cos(\theta)}$$

Partie C : résolution de l'équation (♡)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)\\ &= (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\cos(\theta) - \sin(\theta)\times 2\sin(\theta)\cos(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) - \sin^2(\theta)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) - 3\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) - 3(1-\cos^2(\theta))\cos(\theta)\\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) + 3\cos^3(\theta)\\ &= \boxed{4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}\end{aligned}$$

2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x = \cos(\theta)$. En utilisant la question 1. de la **Partie C** et le fait que $\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ (question 2. de la **Partie A**), on a

$$\begin{aligned}8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0 &\iff 8\cos(\theta)^3 - 6\cos(\theta) = \sqrt{2-\sqrt{2}}\\ &\iff 2\cos(3\theta) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0 \iff \cos(3\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) &\iff 3\theta = \frac{3\pi}{8} \bmod 2\pi \text{ ou } 3\theta = -\frac{3\pi}{8} \bmod 2\pi\\ &\iff \theta = \frac{\pi}{8} \bmod \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{8} \bmod \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

(c) En utilisant, la question précédentes,

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation (♡) sont } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right),\ \cos\left(\frac{19\pi}{24}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{35\pi}{24}\right).}$$