Devoir Surveillé 2

- *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- *Les résultats non encadrés ne seront pas pris en compte dans la notation.*
- *Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
- *La qualité de la rédaction (soin, orthographe ...) et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-3}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de f.
3. Déterminer le domaine de dérivation de f, puis calculer la dérivée.

Exercice 2

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^3}$
   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{x}}$
   (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$$
3. Une urne contient 3 boules numérotées 1 et 7 boules numérotées 0. Créer en python une fonction `tirage` qui n'a pas de paramètre d'entrée et simule le tirage d'une unique boule dans l'urne. Créer en python une fonction `nombre_tirage` qui n'a pas de paramètre d'entrée et renvoie le nombre de tirage réalisé lors de la réalisation de l'expérience précédente.

Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{2x+1} > 1-x$.
2. Soit f la fonction d'expression

$$f(x) = \ln(\sqrt{2x+1} + x - 1)$$

   (a) Déterminer le domaine de définition de f.

   (b) Écrire en `python` une fonction `f` qui demande à l'utilisateur une valeur de x et renvoie `True` si x appartient au domaine de définition de f et `False` sinon.

   (c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

   (d) Déterminer le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes de son domaine de définition.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Ecrire en python une fonction qui prend un `x` en paramètre et renvoie `f(x)` si $x \in \mathcal{D}_f$ et un message d'erreur sinon.
3. Montrer que f est 2π-périodique.
4. Etudier la parité de f. Pour des raisons de symétries, on remarquera qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi[$ pour construire sa courbe représentative.
5. Etudier les variations de f sur $[0, \pi[$.
6. Donner l'équation de la tangente en 0.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
8. Déterminer $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
9. Tracer la courbe représentative de f sur $]-\pi; \pi[$. On fera apparaître la tangente en 0 ainsi que les éventuelles asymptotes.

Problème 5 : une équation de degré 3

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0 \qquad (\heartsuit)$$

Partie A : un calcul de cosinus et sinus

1. Rappeler la formule de duplication du cosinus. En déduire, pour tout nombre réel θ, l'expression de $\cos(\theta)^2$ en fonction de $\cos(2\theta)$.
2. En déduire que $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
3. En déduire les valeurs de $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Partie B : localisation des racines de ($\heartsuit$)

On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. La fonction f s'annule-t-elle sur l'intervalle $]-\infty, -1]$? Justifier.
3. L'équation ($\heartsuit$) admet-elle des solutions dans l'intervalle $[1, +\infty[$? Justifier.
4. Montrer que l'équation ($\heartsuit$) admet une unique solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

   On admettra que l'équation ($\heartsuit$) *admet aussi une unique solution dans* $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right[$ *et une unique solution dans* $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
5. Justifier alors que si x est une solution de ($\heartsuit$), alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$. On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction cosinus.

Partie C : résolution de l'équation ($\heartsuit$)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En utilisant que $3\theta = 2\theta + \theta$, montrer que

$$\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)$$

2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x = \cos(\theta)$. Montrer que

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0 \iff \cos(3\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(3\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

   (c) En déduire l'ensemble des solutions de ($\heartsuit$).