Fiche de calcul puissances

Les règles de calculs de puissances

Voir aussi `http://xymaths.free.fr/Lycee/Common/Cours-Exercices-Calcul-Puissances/#Regles`

Règles

Soient a et b deux réels et m et n deux **entiers relatifs**,

1. $$\boxed{a^m \times a^n = a^{n+m} \text{ et } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

   (cas particulier : $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$)

2. $$\boxed{(ab)^n = a^n \times b^n \text{ et } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

3. $$\boxed{(a^n)^m = a^{n\times m}}$$

Explications

1. $$a^m \times a^n = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{\text{m fois}} \times \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{\text{n fois}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{\text{n+m fois}} = a^{n+m}$$

   $$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{\text{n fois}}}{\underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{\text{m fois}}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{\text{n-m fois}} = a^{n-m}$$

   ($n - m$ par simplification de fraction, l'explication fonctionne quelque soit n et m)

2. $$(ab)^n = \underbrace{((a \times b) \times \cdots \times (a \times b))}_{\text{n fois}} = \underbrace{(a \times \cdots \times a)}_{\text{n fois}} \times \underbrace{(b \times \cdots \times b)}_{\text{n fois}} = a^n \times b^n$$

   $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b} \times \cdots \times \frac{a}{b}\right)}_{\text{n fois}} = \frac{\overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{\text{n fois}}}{\underbrace{(b \times \cdots \times b)}_{\text{n fois}}}$$

3. $$(a^n)^m = \underbrace{(a^n \times \cdots \times a^n)}_{\text{m fois}} = a^{\overbrace{n + \cdots + n}^{\text{m fois}}} = a^{n\times m}$$

Exemples

1. $2^5 \times 2^6 = 2^{11}$ et $\frac{(2,5)^5}{(2,5)^6} = (2,5)^{-1} = \frac{1}{2,5}$
2. $\left(\frac{2}{5}\right)^7 = \frac{2^7}{5^7}$ et $(5\pi)^{-13} = 5^{-13}\pi^{-13}$. On a aussi $(5\pi)^{-13} = \left(\frac{1}{5\pi}\right)^{13} = \frac{1}{5^{13}\pi^{13}}$.
3. $\left(7^6\right)^{-7} = 7^{-42}$.

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser.

Exercice 1:

Simplifier au maximum (ne pas utiliser la calculatrice et laissez au format exposant) :

(a) $7^6 \times 7^8$

(b) $4^{11} \times 5^{11}$

(c) $3^4 \times 3^{-8}$

(d) $5^3 \times 7^{-3}$

(e) $\left(4^{-5}\right)^{-3}$

(f) $(-\pi)^3 \times (2\pi)^5$

(g) $\left(\frac{3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{9}{4}\right)^{-3}$

(h) $\frac{(4^3 \times 5^2)^3}{(2^2 \times 10^3)^5}$

(i) $\frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^4}$

(j) $\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$

(k) $\frac{(-3)^4 \times (-5)^3}{25^2 \times (-3)^{-7}}$

(l) $\frac{-3^4 \times 63^5}{(-9)^4 \times 7^7}$

Exercice 2:

Simplifier au maximum (laissez au format exposant) :

(a) $x^4 \times x^{-8}$

(b) $x^5 \times y^5 \times z^{10}$

(c) $\frac{x^3y^5}{(2xy)^3}$

(d) $\frac{-a^3(-b)^7c^2}{b^{-3}c^3}$

(e) $\frac{-a^3b^2c^3 + (-a)^4b^2c^{-4} + a^7(-b)^3c^5}{a^4b^2c^4 + (-a)^5b^2c^{-3} + a^8b^3c^6}$

Exercice 3:

Compléter :

(a) $2^{\cdots} \times 7^{-2} = 14^{-2}$

(b) $(-7)^3 \times (-7)^{\cdots} = (-7)^{-5}$

(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\cdots} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^7$

(d) $(9^{\cdots})^2 = 3^{-8}$

(e) $\frac{3^5}{3^{\cdots}} = 3^{-7}$

(f) $\frac{4^3}{2^{\cdots}} = 2^{-3}$

(g) $x^4 \times x^{\cdots} = x^{-6}$

(h) $\frac{x^5}{x^{\cdots}} = x^{-8}$

(i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{\cdots} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{40} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-7}$

Exercice 4:

Compléter

(a) $5^{\cdots} + 5^4 = 6 \times 5^4$

(b) $3^6 - 5 \times 9^{\cdots} = -44 \times 9^3$

(c) $x^{n+2} - x^{\cdots} = x^n(x^2 + x^4)$

(d) $3^n - 9^{\cdots} = 3^n\left(1 - 3^{n+2}\right)$

(e) $\pi^n + \pi^{\cdots} = \pi^n\left(1 + \pi^2\right)$

(f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\cdots} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$

Exercice 5:

Dans chacun des cas déterminer les entier naturels n et m

(a) $2^{-5} \times 8^4 = 2^n$

(b) $3^{2020} + 3^{2021} + 3^{2022} = n \times 3^{2020}$

(c) $3^{2020} + 3^{2022} + 3^{2024} = n \times 9^m$

(d) $2^6 \times 3^{12} \times 5^3 \times 7^6 = n^3$ et $= m^2$ (si c'est possible)

(e) $\left(\frac{5^6+5^6+5^6+5^6+5^6}{4^2+4^2+4^2+4^2}\right) \times \left(\frac{2^5+2^5}{25^3+25^3+25^3+25^3+25^3}\right) = m^n$

Exercice 6:

Ecrire les expressions sous la forme $b \times a^m$ avec b et a des réels et m un entier positif. Dans l'énoncé n est un entier supérieur ou égal à 1 :

(a) $2^3 + 2^4$

(b) $3^6 + 9^3$

(c) $5^4 - 5^2 \times 3$

(d) $7^5 \times 3^2 + 7^3 \times 3^4 - 7^7 \times 3^2$

(e) $6^4 + 3^4 - 3^3$

(f) $x^n + 2x^{n+2} + 3x^{n-1}$

(g) $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$

(h) $\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

(i) $\left(-\frac{11}{7}\right)^{n+1} - \left(\frac{11}{7}\right)^{n+3}$