

Fiche de calcul - Equations et inéquations

Règles de calcul :

Equations

- Sommer de chaque côté par une même expression.

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

- Multiplier/Diviser de chaque côté par une même expression non nulle.

$$a = b \Leftrightarrow ac = bc \text{ et } a = b \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

- Sommer des égalités.

$$a = b \text{ et } c = d \implies a + c = b + d$$

- Multiplier des égalités.

$$a = b \text{ et } c = d \implies ac = bd$$

- Egale à 0 :

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

- Appliquer une fonction à une égalité :

$$\text{Si } f \text{ est strictement monotone sur } I \text{ et } (a, b) \in I^2 \\ a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

(\implies est évidente, la propriété assure l'équivalence)

Second degré :

Equations $ax^2 + bx + c = 0$

- Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

— $\Delta \geq 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— $\Delta < 0$:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Inéquations

- Sommer de chaque côté par une même expression.

$$a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$$

- Multiplier de chaque côté par une même expression non nulle.

— Strictement positive ($c > 0$) :

$$a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc \text{ et } a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

— Strictement négative ($c < 0$) :

$$a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc \text{ et } a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

- Sommer des inégalités (de même sens).

$$a \leq b \text{ et } c \leq d \implies a + c \leq b + d$$

- Règles de signe pour le produit ab .

$$ab > 0 \iff a \text{ et } b \text{ de même signe} \\ ab < 0 \iff a \text{ et } b \text{ de signes opposés}$$

Mêmes règles pour le quotient $\frac{a}{b}$.

- Appliquer une fonction à une inégalité

$$\text{Si } f \text{ est strictement croissante sur } I \text{ et } (a, b) \in I^2 \\ a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \\ \text{Si } f \text{ est strictement décroissante sur } I \text{ et } (a, b) \in I^2 \\ a \leq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$$

(Fonctionne aussi avec des inégalités strictes)

Inéquations : signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$

- Dépend de Δ et du signe de a :

— $\Delta > 0$ (si $x_1 \leq x_2$) :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	$\text{sgn}(a)$	0	$-\text{sgn}(a)$	0	$\text{sgn}(a)$

— $\Delta \leq 0$: signe constant

$$\text{Du signe de } a$$

Attention / conseil

- **Multiplier des inégalités par une expression est dangereux** : toujours faire **attention au signe** de l'expression. On évite le plus possible notamment de multiplier une inégalité par des expressions dépendant d'une inconnue : cela obligerait à faire des disjonctions de cas (en fonction du signe de l'expression multipliée).
- Si on a $a \leq b$ et $c \leq d$ **on ne peut pas a priori multiplier les inégalités** (sauf si c et b sont positifs). On prouve (si c'est possible) que $ac \leq bc$ et $bc \leq bd$ ce qui donne $ac \leq bd$
- **Quand on divise une égalité** par une expression dépendant d'un paramètre/inconnue : **toujours vérifier que l'expression ne peut pas s'annuler** (ou faire plusieurs cas).

- **Conseil** - Se ramener à des inéquations et équations du type ≥ 0 (étude de signe) et $= 0$ est souvent intéressant : il s'agit ensuite de **factoriser**.
- Quand on **applique une fonction** à une inégalité/égalité :
 - Vérifier la **stricte monotonie de la fonction** sur l'intervalle I
 - Bien **déterminer I et vérifier que les expressions de part et d'autre appartiennent à I**

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser. Si vous êtes à l'aise n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête

Exercice 1:

Résoudre :

- | | |
|--|---|
| (a) $-\frac{1}{2}x - \frac{5}{3} = 0$ | (i) $4x^5 + 3x^4 = 0$ |
| (b) $5x + 2 = -2x + 3$ | (j) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x+5}{6} + 1$ |
| (c) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{5} = \frac{7x-2}{15}$ | (k) $2x^2 - 7 = -1$ |
| (d) $\frac{3x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$ | (l) $4x^2 + 8x + 4 = 0$ |
| (e) $\frac{6x+7}{4x-1} = \frac{3x+5}{2x-6}$ | (m) $(x-3)^2 = (3x-4)^2$ |
| (f) $(4x+3)(2x-1)(-7x+3) = 0$ | (n) $(x-4)(x+4) = 9$ |
| (g) $(x-3)(x-1) - (x-2)^2 = 5x - 11$ | (o) $(5x+1)(10x-6)(x-1) + (3-5x)(4x-1)(7x-7) = (10x+2)(5-5x)(2x-1)$ |
| (h) $5x^3 + 2x^2 = 0$ | |

Exercice 2:

Résoudre :

- | | | |
|-------------------------|---|--------------------------------------|
| (a) $3x^2 - 5x - 3 = 0$ | (b) $\frac{-3x+1}{x+2} = \frac{2x-5}{2x+2}$ | (c) $\frac{7x^2-3x-7}{x^2-7x+3} = 0$ |
|-------------------------|---|--------------------------------------|

Exercice 3:

Mettre y en fonction des autres variables :

- | | | |
|-----------------------|------------------------------|---|
| (a) $ay + b = by + 2$ | (c) $\frac{(a+2)y}{y+b} = 2$ | (e) $\frac{8cy+5a}{2dy-5b} = \frac{16cy-7b}{4dy-2ab}$ |
| (b) $(b+a)y = 3y + c$ | (d) $(4+a)y = -3y + a + b$ | |

Exercice 4:

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | | |
|---|---------------------------------------|--|
| (a) $\frac{7}{3}x + \frac{1}{2} \geq -\frac{4}{8}x + \frac{1}{3}$ | (e) $5(x^2 + 7) > 0$ | (i) $\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{3x-5}$ |
| (b) $\frac{5}{3}x - \frac{1}{6} \leq -\frac{1}{5}x - \frac{5}{7}$ | (f) $(2x-1)^3(x+3)^2(3-4x)(x+10) > 0$ | (j) $\frac{5x+3}{7x+1} \leq \frac{9x}{3x-6}$ |
| (c) $-2 < 8x + 5 \leq 3$ | (g) $-3 \leq -7x - 9 \leq 7$ | (k) $2 < \frac{x}{x-2} < 3$ |
| (d) $4x^2 - 7 < 0$ | (h) $\frac{1-x}{1+x} > 2$ | |

Exercice 5:

- | | |
|---|---|
| (a) Etudier le signe de $(x^2 - x + 3)(x^2 - 6x + 8)$. | (c) Montrer que pour tout $x \in [3, +\infty[$ $\frac{7x-18}{2x-5} > 3$. |
| (b) Comparer $\frac{2x+3}{x+1}$ et $5x+3$. | (d) Encadrer $\frac{x+2-\cos(x)}{x^2+1}$ pour $x \in [0, 12]$. |

Exercice 6:

Les concombres sont composés à 99% d'eau. On laisse sécher une nuit 500kg de concombres. Le lendemain matin, ils sont composés à 98 % d'eau. Quel est la nouvelle masse des concombres ?

Exercice 7:

Simon et Juliette doivent repeindre un mur. Ensemble ils mettraient 36 minutes. En travaillant seul Simon aurait besoin d'une demi-heure de plus que Juliette. Combien de temps faudrait-il à Juliette pour repeindre le mur seule ?