

Règles

Soient a et b deux réels et m et n deux **entiers relatifs**,

1. Distributivité et factorisation par un facteur commun

$$\begin{aligned}a(b + c) &= ab + ac \\(a + b)(c + d) &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

De gauche à droite : développer. De droite à gauche : factoriser.

2. Identités remarquables

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a - b)(a + b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

De gauche à droite : développer. De droite à gauche : factoriser. La troisième s'emploie beaucoup dans les deux sens (développer et factoriser)

Exemples

1. Développer :

$$\begin{aligned}\text{— } 2(x + 3) &= 2x + 6 \text{ et } 3x^2 + 9x = 3x(x + 3). \\ \text{— } (2x + 4)(x - 5) &= 2x^2 + 4x - 5x - 20 = 2x^2 - x - 20. \\ \text{— } (2x + 3)^2 &= 4x^2 + 12x + 9, (7x - 2)^2 = 49x^2 - 28x + 4 \text{ (identité remarquable)}\end{aligned}$$

2. Factoriser :

$$\begin{aligned}\text{— } x^2 - 6 &= (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) \text{ (identité remarquable)} \\ \text{— } 4x^2 + 12x + 9 &= (2x + 3)^2 \text{ (identité remarquable)} \\ \text{— } x^3 + 2x^2 + x + 2 &= x^2(x + 2) + (x + 2) = (x^2 + 1)(x + 2)\end{aligned}$$

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser. Si vous êtes à l'aise n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête

Exercice 1:

Développer :

(a) $(x + 2)(x - 7)$	(d) $(3x - 4)(-5y^3 + x)(-7y + 2x^2)$	(g) $(-2xy + x^3)(y^4 - zx^3 + y)$
(b) $(x - 3)(2x + 5)$	(e) $(3x - 4)(-y + 3x)^2$	(h) $(-2x + yz)^2(5y - 2z)^2$
(c) $(2x - 3)(5x - 4)$	(f) $(x - 1 + 2y)^2$	

Exercice 2:

Développer (soyez astucieux) :

(a) $(2x - b)\left(x^2 - \frac{b^2}{4}\right)(2x + b)$	(b) $(x + y - 1)(x - y + 1)$	(d) $(x + 2)(x^4 + 16)(x - 2)(x^2 + 4)$
	(c) $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$	(e) $(2a^2 + 1)(4a^4 + 3)(2a^2 - 1)$

Exercice 3:

Compléter l'expression afin que l'expression soit le carré d'un binôme, c'est à dire puisse se mettre sous la forme $(a + b)^2$. L'expression doit être valide pour tout x et y réels. Il peut y avoir plusieurs possibilités.

- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|---------------------------|
| (a) $x^2 + 6x + \dots$ | (c) $x^2 - 3x + \dots$ | (e) $4x^2 + \dots + 9$ | (g) $4x^2 + \dots + 9y^2$ |
| (b) $x^2 + x + \dots$ | (d) $3x^2 + \dots + 3$ | (f) $x^2 + ax + \dots$ | |

Exercice 4:

Factoriser (au maximum) :

- | | |
|------------------------------------|--|
| (a) $7 - (2x - 3)^2$ | (g) $(x + 1)(2x^2 + 3x) - (x + 1)(x^2 + 2x)$ |
| (b) $-1 - 4x^2 + 4x$ | (h) $9x^2 + 6x + 1 + (3x + 1)(2x - 3)$ |
| (c) $(x + 9)(x - 5) + 2(-6x + 30)$ | (i) $(-2x + 3)^2 - (5x - 2y)^2$ |
| (d) $5x(4x - 1) + 16x^2 - 1$ | (j) $(2x - 1)(xy^2 + xy) + (1 - 2x)(x + xy)$ |
| (e) $5x^3 + x^2 + 10x + 2$ | (k) $(x - 5)^2 - 2x(x - 5) + 10(x - 5)$ |
| (f) $2x + 4yx + 16x^2y^2$ | (l) $18x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ |

Exercice 5:

Déterminer α et β (quand c'est possible) :

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $3x^2 - 18x + 24 = 3(x - 2)(x - \alpha)$ | (d) $(x + \alpha)(x + 2) = x^2 + \beta$ | (g) $\alpha x^6 + 2x^5 - x^2 + \beta x = (x^5 + x)(x + 2)$ |
| (b) $2x^2 + 2x - 12 = 2(x - 2)(x - \alpha)$ | (e) $5x^2 + 15x - 5 = 5(x - \alpha)^2 + \beta$ | (h) $\alpha x^2 y^3 z - x^4 y^4 z^3 + \beta x^2 y^3 z^2 = x^4 y^4 z^2(x - z + y)$ |
| (c) $(\alpha x + 3)^2 = 4x^2 - 12x + \beta$ | (f) $3x^2 - 2x + 3 = 3(x - \alpha)^2 + \beta$ | |

Exercice 6:

Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\frac{12x^7 - 6x^3}{-9x^3 + 9x^5}$ | (d) $\frac{-4x^5 - 8x^6}{-4x^5 - 2x^3}$ | (g) $\frac{5x + 25y}{5(x + y)}$ |
| (b) $\frac{7x^3 + 21x^2}{7x^3 + 9x^2}$ | (e) $\frac{5y + 15xy^2 + 30y^3x^2}{5y}$ | (h) $\frac{-9 + (x - 3)^2}{(x - 6)(x + 2)}$ |
| (c) $\frac{4x^8 + 2x^9}{-8x^7 + 2x^9}$ | (f) $\frac{36y}{6x^2y + 18xy + 24x^2}$ | (i) $\frac{x^2 - 25}{(x - 2)(x + 5)}$ |

Exercice 7:

On considère deux nombres x et y .

- On sait que $x - y = 1$ et $x^2 - y^2 = 35$. Déterminer x et y .
- On sait que $x + y = 1$ et $x^2 + y^2 = 2$.

Déterminer (sans calculer x et y) :

- | | | | |
|----------|---------------------------------|-----------------|-----------------|
| (a) xy | (b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ | (c) $x^3 + y^3$ | (d) $x^4 + y^4$ |
|----------|---------------------------------|-----------------|-----------------|

Exercice 8:

Simplifier au maximum (à vous de choisir quand factoriser et quand développer)

- | | |
|--|--|
| (a) $2(2x + 5)^2 + (2x + 5)^3(x - 1) + (2x + 3)(2x + 5)^2$ | (c) $\frac{(5x + 1)^2}{(2x + 1)(2x + 4)} - (x - 1) \left(\frac{x}{2x + 1} - \frac{x + 1}{2x + 4} \right)$ |
| (b) $\frac{n(n + 1)}{2} + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$ | (d) $\frac{4a^2 + 4a + 1}{36} + \frac{a(a + 1)(2a + 1)}{6} + \frac{a^2(a + 1)^2}{4}$ |