Fiche de calcul - Exponentielle et logarithme

Règles de calcul :

Exponentielle

Pour a et b des réels

- Exponentielle d'une somme

$$e^{a+b} = e^a e^b \text{ et } e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

- Puissance d'exponentielle

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

- Exponentielle 0

$$(e^0 = 1)$$

- Réciproque de l'exponentielle

$$\ln(e^a) = a$$

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Logarithme népérien

Pour a et b des réels strictement positifs

- Logarithme du produit

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \text{ et } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

- Logarithme d'une puissance $c \in \mathbb{R}$.

$$\ln(a^c) = c \ln(a)$$

- Logarithme de 1

$$\ln(1) = 0$$

- Réciproque de $\ln$

$$e^{\ln(a)} = a$$

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$

Remarques :

- L'exponentielle transforme une somme en produit. Les règles de calcul avec l'exponentielle sont les mêmes que celles pour les puissances.
- Le logarithme transforme les produits en somme.
- Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques : leur comportement vis à vis des opérations l'est donc lui aussi.

Exemples :

- $e^{2+x} = e^2 e^x$, $e^{-3} = \frac{1}{e^3}$, $\ln(e^{5+x}) = 5 + x$
- $\ln(6x) = \ln(6) + \ln(x)$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, $e^{\ln(8x+2)} = 8x + 2$.

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser. Si vous êtes à l'aise n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête

Exercice 1:

Simplifier, quand cela est possible, les expressions suivantes :

- (a) $\ln(9) - \ln(8) - \ln(6) - \ln(15) + \ln(5)$.
 (b) $\ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) - \ln\left(\frac{4x+2}{x^2-9}\right)$
 (c) $\frac{e^{3x+2}e^{-2x}}{e^{9x+6}e^{-16x}}$
 (d) $\frac{e^{-\ln(x)} + x}{e^{2\ln(x)+1}}$
 (e) $\ln(3e^{7t}) - 21t$.
 (f) $\frac{e^{\ln(x^2)\ln(x^3)} - e^{\ln(x^4)\ln(x^6)}}{e^{\ln(x)^2} (e^{2\ln(x)^2} + e^{11\ln(x)^2})}$
 (g) $\ln\left(e^{x^2-x} + e^{1-x} + \frac{1}{e^{x-2}}\right) + x - \ln(e^{x^2-1} + 1 + e)$

Exercice 2:

Quelles sont les expressions égales ? Le prouver

- (a) $\frac{1}{e^{-x} + 1}$
 (b) $e^{-x+\ln(1)}$
 (c) $1 + e^x$
 (d) $\frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$
 (e) $\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
 (f) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
 (g) $\frac{e^x}{e^x + 1}$
 (h) $\frac{e^{2x} - e^x}{e^x + 1}$
 (i) $\frac{1}{e^x}$

Exercice 3:

Déterminer une autre expression de $\ln(1 + e^t) - t$ sous forme du logarithme d'une expression. L'égalité doit être valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4:

Résoudre :

- (a) $\frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{2}$
 (b) $e^{2x} - e^x - 2 = 0$
 (c) $e^x + 3e^{-x} = 4$
 (d) $\ln(x-4) + \ln(x-3) = \ln(5x+4)$.
 (e) $\ln(1+x) = -1$
 (f) $\ln\left(\frac{1 + e^{2x}}{1 + e^{-2x}}\right) = \frac{1}{2} \ln(e^{4x} + e^{-2x})$

Exercice 5:

Résoudre :

- (a) $\ln(x) > 0$
 (b) $e^{x^2-1} \leq e^x$
 (c) $\frac{\ln(x)}{1 + \ln(x)} < -3$
 (d) $e^{2x} + 3e^x - 4 \leq 0$.
 (e) $\ln(x) + \ln(x-1) \leq \ln(1+x)$
 (f) $\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) > 0$