Fiche de calcul - Dérivation

Dérivées usuelles :

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$f(x) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ $= \frac{1}{\cos(x)^2}$

Règles de calculs :

Forme de la fonction	Formule de dérivation	Condition
$u + v$	$u' + v'$	aucune
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	aucune
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	aucune
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$u \circ v$	$v' \times (u' \circ v)$	$v(I) \subset I$

Conséquences de la formule de dérivée d'une composée :

- Dérivée de u^n $(n \in \mathbb{N}^*)$: $nu' \times u^{n-1}$
- Dérivée de u^n $(n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$: $nu' \times u^{n-1}$ si u ne s'annule pas sur I.
- Dérivée de $\sqrt{u}$: $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$
- Dérivée de $\ln u$: $\dfrac{u'}{u}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$
- Dérivée de e^u : $u' \times e^u$

Conseil pour dériver

- Repérer les fonctions usuelles et Décomposer l'expression à l'aide des opérations : somme, produit, quotient et composition afin d'appliquer les bonnes formules.
- Pour dériver h, une composée : décomposer la fonction h en $u \circ v$, écrire $u'(v(x))$ et multiplier ensuite par $v'(x)$.
  Exemple : $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{2x^2+3}\right)$
  On remarque la fonction ln qui prend comme argument un quotient. Posons $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto \dfrac{x+1}{2x^2+3}$. Alors $h = u \circ v$.
  En effet pour x dans l'ensemble de définition de h, $h(x) = u(v(x)) = \ln(v(x)) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x^2+3}\right)$.
  On utilise la formule de composition pour dériver. Notons que $u'(x) = \dfrac{1}{x}$. On réfléchit/calcule ainsi :

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \overbrace{\frac{1}{\frac{x+1}{2x^2+3}}}^{u'(v(x))=g'\left(\frac{x+1}{2x^2+3}\right)} \times \left(\text{la dérivée de } x \mapsto \frac{x+1}{2x^2+3}\right) \\
&= \frac{2x^2+3}{x+1} \times \frac{2x^2+3-4x(x+1)}{(2x^2+3)^2} \\
&= \frac{-2x^2+4}{(x+1)(2x^2+3)}
\end{aligned}$$

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser. <u>Si vous êtes à l'aise</u> n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête.

Exercice 1:

Déterminer (rapidement) l'ensemble de dérivabilité et dériver les fonctions suivantes. Déterminer les variations pour b), c), e), g), i) et k).

(a) $f : x \longmapsto 4x^9 + 3x^6 + 8x^3 - 7x^5 + 48$

(b) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^6}$

(c) $f : x \longmapsto -\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$

(d) $f : x \longmapsto \left(x^5 + x^3 + 1\right)\left(x^4 - 2x^2 + 3\right)$

(e) $f : x \longmapsto -\dfrac{2x+5}{3x+5}$

(f) $f : x \longmapsto \dfrac{8x+5}{5x+9}$

(g) $f : x \longmapsto -\dfrac{5\left(x^2+5\right)}{x-4}$

(h) $f : x \longmapsto \dfrac{(x-2)x}{(x^2-4)}$

(i) $f : x \longmapsto -\dfrac{x\sqrt{x}}{3(x+1)}$

(j) $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{4\sqrt{x}}$

(k) $f : x \longmapsto \dfrac{3 - \frac{2}{x}}{2x+2}$

(l) $f : x \longmapsto -\dfrac{(x+8)\sqrt{x}}{2x+5}$

(m) $f : x \longmapsto -\dfrac{x^2 - \sqrt{x} + 3}{2x^2+1}$

Exercice 2:

On considère une fonction u inconnue dérivable et $v : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$. On sait que la dérivée de uv est $x \mapsto 24x^3 - 33x^2 - 12x + 9$ et que celle de $\dfrac{u}{v}$ est $x \mapsto \dfrac{19x^2 - 16x + 1}{(3x^2+2x-1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, \dfrac{1}{3}\right\}$. Déterminer u.

Exercice 3:

On note u une fonction (dont on ne connaît pas l'expression) dérivable sur un intervalle adapté. Ecrire les fonction h suivante sous la forme $f \circ u$ si cela est possible et calculer la dérivée de h (on n'étudiera pas le domaine de dérivabilité)

(a) $h = \sqrt{u}$

(b) $h = 3u^{n+2}$

(c) $h = \dfrac{1}{\ln(u)}$

(d) $h = \dfrac{5}{u^7}$

(e) $h = \sqrt{1 + u^2}$

(f) $h : x \mapsto e^{\sqrt{u(x)+x+1}}$

(g) $h = \dfrac{5}{u^{n+3}}$ pour $n \in \mathbb{N}$

(h) $h = 6u^{n-3}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Exercice 4:

Dériver (on n'étudiera pas le domaine de dérivabilité)

(a) $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

(b) $h : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x+1} + 2x\right)$

(c) $h : x \mapsto -6\left(\sqrt{x} + 2x + 3x^2\right)^8$

(d) $h : x \mapsto \dfrac{2x+1}{e^{5x+7} + 2}$

(e) $h : x \mapsto \dfrac{5}{(2x^3+3x)^4}$

(f) $h : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x+2} + (x^4 + 7x + e^x)^4\right)$

(g) $h : x \mapsto \sqrt{\ln(2x^2+3) + e^{\sqrt{x^2+1}}}$.

Exercice 5:

Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver

(a) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2+x}{1+x^2}}$

(b) $f : x \mapsto \left|\dfrac{x+5}{x-2}\right|$

(c) $f : x \mapsto \ln(x^2 - 5)$

(d) $f : x \mapsto x\ln((x+2)^2)$

(e) $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x+5)}$

(f) $f : x \mapsto \sqrt{3x+2} + \dfrac{2x+5}{\ln(4x+3)}$

(g) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+5}\; e^{6x+2}$

Exercice 6:

En utilisant une fonction :

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $2\ln(x) < x$

(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-x} \leq x$.

(c) Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$ (on pourra dériver deux fois)

(d) Déterminer les entiers n tels que $2^n \geq n^2$