

Fiche de calcul - Primitives

Trouver une primitive de f consiste en trouver une fonction g tel que $g' = f$

Il suffit donc bien souvent de connaître ses dérivées usuelles et ses règles de calcul sur les dérivées pour déterminer des primitives : déterminer une primitive c'est faire le calcul/ le raisonnement inverse de la dérivation

Primitives usuelles :

Fonction f	Domaine de définition	Une primitive F
$f(x) = C^{\text{te}}$	$\mathbb{R}$	$F(x) = C^{\text{te}} x$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n \leq -2$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$F(x) = \sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$F(x) = x \ln(x) - x$

Règles de calculs :

Forme de la fonction	Une primitive	Condition
$u + v$	$U + V$	aucune
λu	λU	aucune

Conséquences de la formule de dérivée d'une composée :

Forme de la fonction	Une primitive	Condition
$u' \times e^u$	e^u	aucune
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	pour tout $x \in I, u(x) > 0$
$u' \times u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	aucune
$u' \times u^n \ (\text{avec } n < -1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	pour tout $x \in I, u(x) \neq 0$
$u' \times \cos(u)$	$\sin(u)$	aucune
$u' \times \sin(u)$	$-\cos(u)$	aucune

Conseil pour primitiver

- Quand la primitive n'est pas trop compliquée, toujours la dériver pour vérifier qu'on obtient la fonction dont on cherche la primitive (donnée dans l'énoncé donc).
- Primitiver une somme : primitiver chacun des termes et sommer.
- Quand je veux primitiver : est-ce une primitive usuelle ? est-ce une primitive de type composée ?

Exemple : $x \mapsto \sin(5x)e^{\cos(5x)}$

On remarque une exponentielle. La fonction semble être sous une forme proche de $u'e^u$ avec $u(x) = \cos(5x)$ puisque la dérivée de la fonction $\cos$ est la fonction $-\sin$.

Méthode 1 : on cherche donc la primitive sous la forme $x \mapsto \lambda e^{\cos(5x)}$. On dérive et on trouve $x \mapsto -5\lambda \sin(5x)e^{\cos(5x)}$.

Comme on veut trouver $x \mapsto \sin(5x)e^{\cos(5x)}$, on prend $-5\lambda = 1$ donc $\lambda = -\frac{1}{5}$ et une primitive du premier terme est donc $x \mapsto -\frac{1}{5}e^{\cos(5x)}$.

Méthode 2 : On fait apparaître $u'e^u$ dans l'expression de la fonction à primitiver : $\sin(5x)e^{\cos(5x)} = -\frac{1}{5} \times \underbrace{-5 \sin(5x)}_{u'(x)} \underbrace{e^{\cos(5x)}}_{e^{u(x)}}$.

Une primitive est donc $x \mapsto -\frac{1}{5}e^{\cos(5x)}$.

- On fait très attention : il n'y a pas de primitive général de uv ou de $\frac{u}{v}$. Il faudra soit reconnaître l'expression d'une dérivée de type composée, soit pour le produit utiliser les méthodes d'intégration par parties.

Formule d'intégration par parties : Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Voici des exercices de calculs. Il faut en faire très régulièrement (5 à 10 minutes par jour) afin de progresser. Si vous êtes à l'aise n'hésitez pas à faire le plus de calcul possible de tête.

Exercice 1:

De quelle fonction, les fonctions suivantes sont-elles les primitives? (on ne s'intéressera pas à l'intervalle sur lesquelles ces primitives sont valides)

$$(a) \quad x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^x - \frac{1}{x} + 2$$

$$(b) \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 5x + 2} + 4$$

$$(c) \quad x \mapsto (x + 1) \ln(x^2 - 1) - 47$$

Exercice 2:

Déterminer quand c'est possible une primitive (on donnera un intervalle de validité) de

$$(a) \quad x \mapsto 1 - x + x^5 + 3x^7$$

$$(c) \quad x \mapsto 2x + 3x^6 + \frac{1}{x}$$

$$(f) \quad x \mapsto \sin(x) - 2 \cos(x) + 5x$$

$$(b) \quad x \mapsto x + \frac{1}{x^6} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$(d) \quad x \mapsto (x - 1)(x + 3)$$

$$(g) \quad x \mapsto \frac{3x + 2}{x}$$

$$(e) \quad x \mapsto \frac{-4}{3x^2}$$

$$(h) \quad x \mapsto x\sqrt{x}$$

Exercice 3:

Déterminer les réels α , β et γ , ainsi que la fonction f pour que la dérivée de la fonction h soit égale à g (donc pour que $h' = g$). Pour (f) et (g), on vous aide un peu moins que pour les précédents. (On ne donnera pas d'intervalle de validité)

$$(a) \quad h : x \mapsto \alpha \ln(f) \text{ et } g : x \mapsto \frac{2}{1 + 3x}$$

$$(e) \quad h : x \mapsto \alpha \cos(f) \text{ et } g : x \mapsto \frac{\sin(\ln(x))}{x}$$

$$(b) \quad h : x \mapsto \alpha x^5 + \beta x^\gamma \text{ et } g : x \mapsto \frac{2}{3}x^4 + 5x^{11}$$

$$(f) \quad h : x \mapsto \alpha f \text{ et } g : x \mapsto \frac{3e^x + 3}{(e^x + x)^5}$$

$$(c) \quad h : x \mapsto \frac{\alpha}{f} \text{ et } g : x \mapsto \frac{4}{(3x + 5)^2}$$

$$(g) \quad h : x \mapsto \alpha f \text{ et } g : x \mapsto \frac{9x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$(d) \quad h : x \mapsto \alpha \ln(f) \text{ et } g : x \mapsto \frac{6x + 3}{x^2 + x - 3}$$

Exercice 4:

Déterminer si possible une primitive de (On ne donnera pas d'intervalle de validité)

$$(a) \quad x \mapsto -2xe^{3x^2+2}$$

$$(g) \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^5}$$

$$(n) \quad x \mapsto \frac{5x}{\sqrt{3x^2 + 1}} - \cos(x)$$

$$(b) \quad x \mapsto \frac{4x^3 + x}{2x^4 + x^2}$$

$$(h) \quad x \mapsto (3x + 1) \cos(x^2)$$

$$(o) \quad x \mapsto \frac{5e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} + \frac{7}{x^2}$$

$$(c) \quad x \mapsto 6x^2 e^{3x^2}.$$

$$(i) \quad x \mapsto \frac{\sin(x) + 1}{\cos^2(x)}$$

$$(p) \quad x \mapsto (3x^2 + 3)(5x^3 + 15x)^7$$

$$(d) \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{2 - 3 \sin(x)}}$$

$$(j) \quad x \mapsto \sin(x) \cos(x)$$

$$(q) \quad x \mapsto \frac{-15x^4 + 3 \sin(x)}{\cos(x) + x^5}$$

$$(e) \quad x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^2}$$

$$(k) \quad x \mapsto (2x + 7)^6$$

$$(l) \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x - 3}} + \frac{1}{x}$$

$$(f) \quad x \mapsto \frac{4x - 10}{x^2 - 5x + 6}$$

$$(m) \quad x \mapsto \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$$

$$(r) \quad x \mapsto \frac{4 \sin(x) - 2 \tan^2(x)}{(\tan(x) - x + 2 \cos(x))^3}$$

Exercice 5:

A l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive des fonctions suivantes qui s'annule en a .

$$(a) \quad x \mapsto e^{-x} \sin(2x) \text{ avec } a = 1$$

$$(b) \quad x \mapsto (x + 1)\sqrt{1 - x} \text{ avec } a = 0$$

$$(c) \quad x \mapsto x^2 \ln(x) \text{ avec } a = 1$$