

Exercice 1:

Déterminer (rapidement) l'ensemble de dérivabilité et dériver les fonctions suivantes. Déterminer les variations pour $b)$, $c)$, $e)$, $g)$ et $i)$.

- (a) Correction + f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $f'(x) = 36x^8 + 18x^5 + 24x^2 - 35x^4$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

- (b) Correction +
- $$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^7}$$

On étudie le signe de la dérivée. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^7} = \frac{-2x^7 + 6x^3}{x^{10}} = \frac{-2x^3(x^4 - 3)}{x^{10}} \\ &= \frac{-2x^3(x^2 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3})}{x^{10}} = \frac{-2x^3(x - \sqrt{\sqrt{3}})(x + \sqrt{\sqrt{3}})(x^2 + \sqrt{3})}{x^{10}} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^{10} > 0$ et $x^2 + \sqrt{3} > 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de l'expression $-2x^3(x - \sqrt{\sqrt{3}})(x + \sqrt{\sqrt{3}})$.

Variations +

x	$-\infty$	$-\sqrt{\sqrt{3}}$	0	$\sqrt{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$-2x^3$		+	+	-	-
$x - \sqrt{\sqrt{3}}$		-	-	0	+
$x + \sqrt{\sqrt{3}}$		-	0	+	+
f'		+	0	-	-
f		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	

La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{\sqrt{3}}]$ et sur $]0, \sqrt{\sqrt{3}}]$. Elle est strictement décroissante sur $[-\sqrt{\sqrt{3}}, 0[$ et sur $[\sqrt{\sqrt{3}}, +\infty[$. Elle admet un maximum $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ en $\sqrt{\sqrt{3}}$ et en $-\sqrt{\sqrt{3}}$. Notons que la fonction est paire et admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie (ce qui est cohérent avec le tableau de variation).

La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$. C'est le produit de la fonction racine carrée dérivable sur $]0, +\infty[$ et de la somme de la fonction cube avec la fonction inverse. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc leur somme est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:

(c) Correction +

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} - \left(x^3 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= -\left(\frac{3x^4 - 1}{x^2}\right) \frac{2x}{2\sqrt{x}} - \left(\frac{x^4 + 1}{x}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-6x^4 + 2 - x^4 - 1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{-7x^4 + 1}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-7x^4 + 1}{2x\sqrt{x}} = -7 \frac{x^4 - \frac{1}{7}}{2x\sqrt{x}} = -7 \frac{\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{2x\sqrt{x}} \\ &= -7 \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}\right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}\right) \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

On remarque que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $2x\sqrt{x} > 0$, $x^2 + \frac{1}{\sqrt{7}} > 0$ et $x + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}} > 0$. Donc

la dérivée est du signe de l'expression $-7 \left(x - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}\right)$. On calcule $f\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}\right) \approx -1,45757$.

Variations +

x	0	$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}$	$+\infty$
f'		+	-
f		$f\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}\right)$	

La fonction f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}\right]$ et strictement décroissante sur

$\left[\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}, +\infty\right[$. Elle admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{7}}}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. C'est le produit de deux fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

(d) Correction +

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^4 + 3x^2) (x^4 - 2x^2 + 3) + (x^5 + x^3 + 1) (4x^3 - 4x) \\ &= (5x^4 + 3x^2) (x^4 - 2x^2 + 3) + (x^5 + x^3 + 1) (4x^3 - 4x) \\ &= 9x^8 - 7x^6 + 5x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 4x \end{aligned}$$

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$:

(e) Correction +

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2(3x+5) - 3(2x+5)}{(3x+5)^2} \\ &= \frac{5}{(3x+5)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$:

$$f'(x) = \frac{5}{(3x+5)^2}$$

Variations +

On remarque que la dérivée est strictement positive. On prend garde au fait que D_f n'est pas un intervalle et on peut conclure que : la fonction f est strictement croissante sur $\left] -\infty, -\frac{5}{3} \right[$ et sur $\left] -\frac{5}{3}, +\infty \right[$.

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{9}{5} \right\}$:

(f) Correction +

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8(5x+9) - 5(8x+5)}{(5x+9)^2} \\ &= \frac{47}{(5x+9)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{9}{5} \right\}$:

$$f'(x) = \frac{47}{(5x+9)^2}$$

Variations +

On remarque que la dérivée est strictement positive. On prend garde au fait que D_f n'est pas un intervalle et on peut conclure que : la fonction f est strictement croissante sur $\left] -\infty, -\frac{9}{5} \right[$ et sur $\left] -\frac{9}{5}, +\infty \right[$.

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5 \times \frac{(x-4)2x - (x^2+5)}{(x-4)^2} \\ &= -5 \times \frac{x^2 - 8x - 5}{(x-4)^2} \\ &= -5 \times \frac{x^2 - 8x - 5}{(x-4)^2} \end{aligned}$$

(g) Correction +

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$$f'(x) = -5 \times \frac{x^2 - 8x - 5}{(x - 4)^2}$$

Le signe de f' est le même que celui de la fonction polynôme du second degré $p : x \mapsto -5(x^2 - 8x - 5)$ définie sur $\mathbb{R}$. Son discriminant est $\Delta = 84$ et les deux racines x_1 et x_2 associées puisque $\Delta > 0$ sont :

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{84}}{2} = 4 - \sqrt{21}$$

$$x_2 = \frac{8 + \sqrt{84}}{2} = 4 + \sqrt{21}$$

Variations + Comme le coefficient devant x^2 est négatif ($-5 < 0$), on en déduit que $p(x)$ est positive pour $x \in [x_1, x_2]$ et négative sinon.

x	$-\infty$	$4 - \sqrt{21}$	4	$4 + \sqrt{21}$	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$-$
f					

Donc f est strictement croissante sur $[4 - \sqrt{21}, 4[$ et sur $]4, 4 + \sqrt{21}]$. Elle est strictement décroissante sur $[4 + \sqrt{21}, +\infty[$ et sur $] - \infty, 4 - \sqrt{21}]$. La fonction f admet un minimum local en $4 - \sqrt{21}$ et un maximum local en $4 + \sqrt{21}$.

Pour tout $x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 4) - 2x^2(x - 2)}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 8x - 2x^2 + 8 - 2x^3 + 4x^2}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{2x^2 - 8x + 8}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{2(x^2 - 4x + 4)}{(x - 2)^2(x + 2)^2} \\
 &= \frac{2(x^2 - 2)^2}{(x - 2)^2(x + 2)^2} \\
 &= \frac{2}{(x + 2)^2}
 \end{aligned}$$

(h) Correction +

On pouvait aussi remarquer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x}{x + 2}$, ce qui simplifie beaucoup le calcul de la dérivée.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Le numérateur est dérivable sur $D =]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur D . Le numérateur est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur D donc est dérivable sur D . Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3} \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(x+1) - x\sqrt{x}}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}x + \frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{6} \frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(i) Correction +

On vérifie en calculant le taux d'accroissement que f est dérivable en 0. Soit $h \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = -\frac{h\sqrt{h}}{3(h+1)h} = -\frac{\sqrt{h}}{3(h+1)}$$

qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = -\frac{1}{6} \frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

(on obtient bien avec cette expression $f'(0) = 0$)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = -\frac{1}{6} \frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x\sqrt{x} > 0$, $\sqrt{x} > 0$ et $(x+1)^2 > 0$. On conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) < 0$ et $f(0) = 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et atteint en 0 un maximum égal à 0 (qui n'est pas un maximum local).

- (j) La fonction f est définie sur $]0, +\infty[$. Le numérateur est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur est le produit d'une constante par la fonction racine carrée et est donc dérivable sur $D =]0, +\infty[$. Donc f est dérivable sur D comme produit

Variations + de fonctions dérivables sur D . Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{8\sqrt{x} - \frac{2(2x+1)}{\sqrt{x}}}{16x} \\ &= \frac{8x - 2(2x+1)}{16x\sqrt{x}} \\ &= \frac{8x - 4x - 2}{16x\sqrt{x}} \\ &= \frac{4x - 2}{16x\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x - 1}{8x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Son dénominateur est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en -1 . Son numérateur est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ (son dénominateur ne s'annule pas sur D_f), donc f est dérivable sur D_f . Pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{4x+4}{x^2} - 2\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{(2x+2)^2} \\ &= \frac{\frac{4x+4}{x^2} - 6 + \frac{4}{x}}{(2x+2)^2} \\ &= \frac{\frac{4x+4}{x^2} - \frac{6x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2}}{(2x+2)^2} \\ &= \frac{4x+4-6x^2+4x}{x^2(2x+2)^2} \\ &= \frac{-6x^2+8x+4}{x^2(2x+2)^2} \end{aligned}$$

(k) Correction +

La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ et pour tout $x \in D_f$:

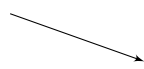
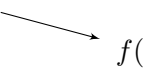
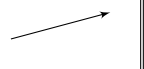
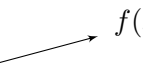
$$f'(x) = \frac{-6x^2+8x+4}{x^2(2x+2)^2} = \frac{2(-3x^2+4x+2)}{x^2(2x+2)^2}$$

Le dénominateur étant positif pour tout $x \in D_f$, le signe de la dérivée est déterminé par le numérateur qui est l'expression d'une fonction polynôme du second degré p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 2(-3x^2+4x+2)$. Le discriminant associé $\Delta = 40 > 0$. Donc p admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4+2\sqrt{10}}{-6} = \frac{2-\sqrt{10}}{3} \approx -0,387 \\ x_2 &= \frac{-4-2\sqrt{10}}{-6} = \frac{2+\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

Variations +

Le coefficient devant x^2 étant négatif ($-6 < 0$), $p(x)$ est positive pour $x \in [x_1, x_2]$ et négative sinon. Donc

x	$-\infty$	-1	$\frac{2-\sqrt{10}}{3}$	0	$\frac{2+\sqrt{10}}{3}$	$+\infty$
f'	-		-	0	+	-
f			 $f(x_1)$ 		 $f(x_2)$ 	

Donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{2-\sqrt{10}}{3}, 0\right]$ et sur $\left[0, \frac{2+\sqrt{10}}{3}\right]$. Elle est strictement décroissante sur $] -\infty, -1]$, $\left]-1, \frac{2-\sqrt{10}}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{2+\sqrt{10}}{3}, +\infty\right[$. Elle admet un maximum local en $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$ et un minimum local en $\frac{2-\sqrt{10}}{3}$.

L'ensemble de définition de la fonction est $D_f = \mathbb{R}^+$. Le numérateur est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Le dénominateur est une fonction affine dérivable sur D_f . Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Donc pour tout $x \in D$

(l) Correction +

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \frac{\left(\sqrt{x} + \frac{(x+8)}{2\sqrt{x}}\right) (2x+5) - 2(x+8)\sqrt{x}}{(2x+5)^2} \\ &= - \frac{\frac{2(2x+5)x}{2\sqrt{x}} + \frac{(x+8)(2x+5)}{2\sqrt{x}} - \frac{4(x+8)x}{2\sqrt{x}}}{(2x+5)^2} \\ &= - \frac{2(2x+5)x + (x+8)(2x+5) - 4(x+8)x}{2\sqrt{x}(2x+5)^2} \\ &= - \frac{4x^2 + 10x + 2x^2 + 21x + 40 - 4x^2 - 32x}{2\sqrt{x}(2x+5)^2} \\ &= - \frac{2x^2 - x + 40}{2\sqrt{x}(2x+5)^2} \end{aligned}$$

On vérifie en calculant le taux d'accroissement que f n'est pas dérivable en 0. Soit $h \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = - \frac{(h+8)\sqrt{h}}{(2h+5)h} = - \frac{(h+8)}{(2h+5)\sqrt{h}}$$

qui ne possède pas de limite réelle quand h tend vers 0. Donc l'ensemble de dérivabilité de f est D .

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$. Le numérateur est la somme de fonctions dérivables sur $D =]0, +\infty[$ (attention ce n'est pas une fonction polynôme). Donc le numérateur est dérivable sur D . Le dénominateur (qui ne s'annule pas pour $x \in \mathbb{R}$) est une fonction polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est le quotient de fonction dérivable sur D et est donc dérivable sur D . Pour tout $x \in D$:

(m) Correction +

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \frac{(2x^2 + 1) \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - 4x(x^2 - \sqrt{x} + 3)}{(2x^2 + 1)^2} \\ &= - \frac{(2x^2 + 1) \left(\frac{4x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{8x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}(x^2 - \sqrt{x} + 3)}{(2x^2 + 1)^2} \\ &= - \frac{(2x^2 + 1)(4x\sqrt{x} - 1) - 8x\sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + 3)}{2\sqrt{x}(2x^2 + 1)^2} \\ &= - \frac{8x^3\sqrt{x} - 2x^2 + 4x\sqrt{x} - 1 - 8x^3\sqrt{x} + 8x^2 - 24x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(2x^2 + 1)^2} \\ &= - \frac{6x^2 - 20x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(2x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

On vérifie en calculant le taux d'accroissement que f n'est pas dérivable en 0. Soit $h \in \mathbb{R}^+$, $h \neq 0$:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = - \frac{h^2 - \sqrt{h} + 3}{(2h^2 + 1)h} + \frac{3}{h} = - \frac{h^2 - \sqrt{h} + 3}{(2h^2 + 1)h} + \frac{3(2h^2 + 1)}{(2h^2 + 1)h} = \frac{6h^2 + 3 - h^2 + \sqrt{h} - 3}{(2h^2 + 1)h}$$

donc

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{6h\sqrt{h} - h\sqrt{h} + 1}{(2h^2 + 1)\sqrt{h}}$$

qui ne possède pas de limite réelle quand h tend vers 0. Donc l'ensemble de dérivabilité de f est D .

On considère une fonction u inconnue dérivable et $v : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$. On sait que la dérivée de uv est $x \mapsto 24x^3 - 33x^2 - 12x + 9$ et que celle de $\frac{u}{v}$ est $x \mapsto \frac{19x^2 - 16x + 1}{(3x^2 + 2x - 1)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$. Déterminer u .

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$

On sait que

$$\frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{19x^2 - 16x + 1}{(3x^2 + 2x - 1)^2}$$

et que

$$u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 24x^3 - 33x^2 - 12x + 9.$$

Donc :

$$u'(x)v(x) - v'(x)u(x) = 19x^2 - 16x + 1$$

Correction $\boxed{+}$

Donc en faisant la différence des deux :

$$2v'(x)u(x) = 24x^3 - 52x^2 + 4x + 8 \text{ donc } v'(x)u(x) = 12x^3 - 26x^2 + 2x + 4.$$

Donc :

$$(6x + 2)u(x) = 12x^3 - 26x^2 + 2x + 4$$

Or $12x^3 - 26x^2 + 2x + 4 = (6x + 2)(2x^2 - 5x + 2)$ (on trouve ceci en cherchant $ax^2 + bx + c$ tel que $12x^3 - 26x^2 + 2x + 4 = (6x + 2)(ax^2 + bx + c)$: on développe et on identifie)

Donc s'il y a une solution $u(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

On vérifie aisément que cette fonction vérifie bien les hypothèses de l'énoncé.

Exercice 3:

On note u une fonction (dont on ne connaît pas l'expression) dérivable sur un intervalle adapté. Ecrire les fonction h suivante sous la forme $f \circ u$ puis calculer la dérivée de h (on n'étudiera pas le domaine de dérivabilité)

(a) $h = \sqrt{u}$

Correction $\boxed{+}$ On prend $f(x) = \sqrt{x}$ et on a bien $h(x) = f(u(x)) = \sqrt{u(x)}$. $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}u'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

(b) $h = 3u^{n+2}$

Correction $\boxed{+}$ On prend $f(x) = 3x^{n+2}$. Alors $h'(x) = 3(n+2)(u(x))^{n+1}u'(x) = 3(n+2)u'(x)(u(x))^{n+1}$

(c) $h = \frac{1}{\ln(u)}$

Correction $\boxed{+}$ On prend $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Alors $h'(x) = -\frac{\frac{u'(x)}{u(x)}}{\ln(u(x))^2} = -\frac{u'(x)}{u(x)\ln(u(x))^2}$.

(d) $h = \frac{5}{u^7} = 5u^{-7}$

Correction $\boxed{+}$ On prend $f(x) = 5x^{-7}$. Alors $h'(x) = -35u'(x)(u(x))^{-8}$

(e) $h = \sqrt{1 + u^2}$

Correction $\boxed{+}$ On prend $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Alors $h'(x) = \frac{2u'(x)u(x)}{2\sqrt{1 + u(x)^2}} = \frac{u'(x)u(x)}{\sqrt{1 + u(x)^2}}$

(f) $h : x \mapsto e^{\sqrt{u(x)+x+1}}$

Correction $\boxed{+}$ Sur cet exemple on ne peut pas trouver f tel que demandé par l'énoncé. Par contre on peut calculer la dérivée : $h'(x) = e^{\sqrt{u(x)+x+1}} \times \frac{u'(x) + 1}{2\sqrt{u(x) + x + 1}}$

(g) $h = \frac{5}{u^{n+3}}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Correction $\boxed{+}$ On prend $f(x) = \frac{5}{x^{n+3}} = 5x^{-n-3}$. Alors $h'(x) = 5(-n-3)u'(x)(u(x))^{-n-4}$.

(h) $h = 6u^{n-3}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Correction $\boxed{+}$ On prend $f(x) = 6x^{n-3}$. Alors $h'(x) = 6(n-3)u'(x)(u(x))^{n-4}$.

Exercice 4:

Dériver (on n'étudiera pas le domaine de dérivabilité)

(a) $h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 1}$

On reconnaît la composée d'un polynôme $x \mapsto x^2 + 3x + 1$ par une racine carrée. La fonction "la plus à l'extérieur" est la racine carrée. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc :

Correction $\boxed{+}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} \times (\text{la dérivée de } x \mapsto x^2 + 3x + 1) \\ &= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} \end{aligned}$$

(b) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x+1} + 2x)$

On reconnaît la composée de $x \mapsto \sqrt{x+1} + 2x$ par la fonction $\ln$. La fonction "la plus à l'extérieur" est la fonction $\ln$. La dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ est $\frac{1}{x}$. On peut remarquer que $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est encore une composée. Donc :

Correction $\boxed{+}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2x} \times (\text{la dérivée de } x \mapsto \sqrt{x+1} + 2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2x} \times \left(2 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \times (\text{la dérivée de } x \mapsto x+1) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2x} \times \left(2 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \times 1 \right) \\ &= \frac{\left(2 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)}{\sqrt{x+1} + 2x} \end{aligned}$$

(c) $h : x \mapsto -6(\sqrt{x} + 2x + 3x^2)^8$

La fonction la plus à l'extérieur est $x \mapsto -6x^8$. Donc :

Correction $\boxed{+}$

$$h'(x) = -48(\sqrt{x} + 2x + 3x^2)^7 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 + 6x \right)$$

(d) $h : x \mapsto \frac{2x+1}{e^{5x+7} + 2}$

On repère un quotient et au dénominateur une fonction composée $x \mapsto e^{5x+7}$ dont la fonction la plus à l'extérieur est l'exponentielle. Sa dérivée est $x \mapsto 5e^{5x+7}$. On en déduit la dérivée de h

Correction $\boxed{+}$

$$h'(x) = \frac{2(e^{5x+7} + 2) - 5e^{5x+7}(2x+1)}{(e^{5x+7} + 2)^2} = \frac{4 - e^{5x+7}(10x+3)}{(e^{5x+7} + 2)^2}$$

(e) $h : x \mapsto \frac{5}{(2x^3 + 3x)^4}$

Deux façons de réfléchir.

Soit on voit que $h(x) = 5(2x^3 + 3x)^{-4}$. On repère une fonction composée dont la fonction la plus à l'extérieur est $x \mapsto 5x^{-4}$. Donc :

$$h'(x) = -4 \times 5(2x^3 + 3x)^{-5} \times (6x^2 + 3) = -\frac{20(6x^2 + 3)}{(2x^3 + 3x)^5}$$

Correction + Soit on applique la dérivée d'un quotient avec au dénominateur la composée $x \mapsto (2x^3 + 3x)^4$ dont la fonction la plus à l'extérieur est $x \mapsto x^4$. Ce qui nous donne la dérivée du dénominateur $x \mapsto 4(2x^3 + 3x)^3 \times (6x^2 + 3)$. D'où :

$$h(x) = -\frac{5 \times 4(2x^3 + 3x)^3(6x^2 + 3)}{(2x^3 + 3x)^8} = -\frac{20(6x^2 + 3)}{(2x^3 + 3x)^5}$$

On retrouve bien le même résultat. La transformation faite dans le premier choix est intéressante lorsqu'on désire primitiver.

(f) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x+2} + (x^4 + 7x + e^x)^4)$

L'exemple est un peu plus compliqué puisque on repère une fonction composée. La fonction la plus à l'extérieur est la fonction $\ln$. Dans ces arguments on repère deux fonctions composées $g_1 : x \mapsto \sqrt{x+2}$ et $g_2 : x \mapsto (x^4 + 7x + e^x)^4$. Dérivons d'abord ces deux fonctions. Pour la première on trouve :

$$g_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

Pour g_2 la fonction la plus à l'extérieur est la fonction $x \mapsto x^4$ donc :

Correction +

$$g_2'(x) = 4(x^4 + 7x + e^x)^3(4x^3 + 7 + e^x)$$

donc :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+2} + (x^4 + 7x + e^x)^4} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + 4(x^4 + 7x + e^x)^3(4x^3 + 7 + e^x) \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} + 4(4x^3 + 7 + e^x)(x^4 + 7x + e^x)^3}{\sqrt{x+2} + (x^4 + 7x + e^x)^4} \end{aligned}$$

(g) $h : x \mapsto \sqrt{\ln(2x^2 + 3) + e^{\sqrt{x^2+1}}}$.

L'exemple est similaire au précédent. La fonction la plus à l'extérieur est la fonction racine carrée. On introduit les deux fonctions composées : $g_1 : x \mapsto \ln(2x^2 + 3)$ et $g_2 : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+1}}$. Remarquons que g_2 est la composée de l'exponentielle et la fonction composée $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$.

$$g_1'(x) = \frac{1}{2x^2 + 3} \times 4x = \frac{4x}{2x^2 + 3}$$

Correction +

$$g_2'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

donc :

$$h'(x) = \frac{\frac{4x}{2x^2+3} + \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{\ln(2x^2 + 3) + e^{\sqrt{x^2+1}}}}$$

Exercice 5:

Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver

La fonction f est la composée de la fonction $\frac{2+x}{1+x^2}$ et par la fonction racine carrée dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Donc, par composition, f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si $\frac{2+x}{1+x^2} > 0$. Or $1+x^2 > 0$ pour tout

(a) Correction $\boxed{+}$ $x \in \mathbb{R}$ donc $\frac{2+x}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Donc f est dérivable sur $D =]-2, +\infty[$ et pour tout $x \in D$

$$f'(x) = \frac{1+x^2-4x-2x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{2+x}{1+x^2}}} = \frac{1-4x-x^2}{2(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)(2+x)}}$$

La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Etudions le signe de $\frac{x+5}{x-2}$. $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$ et $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. A l'aide d'un tableau de signe, on conclue que $\frac{x+5}{x-2} \geq 0$ pour $x \in]-\infty, -5] \cup]2, +\infty[$ et négative stricte sinon.

(b) Correction $\boxed{+}$ $f : x \mapsto \left| \frac{x+5}{x-2} \right| = \begin{cases} \frac{x+5}{x-2} & \text{si } x \in]-\infty, -5] \cup]2, +\infty[\\ -\frac{x+5}{x-2} & \text{sinon} \end{cases}$ La fonction valeur absolue étant

dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par composition f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{(x-2)^2} & \text{si } x \in]-\infty, -5] \cup]2, +\infty[\\ -\frac{3}{(x-2)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction $x \mapsto x^2 - 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composition f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si $x^2 - 5 > 0$ donc si $x \in D =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$.

(c) Correction $\boxed{+}$ Donc pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 5}$$

Attention on ne peut pas faire la simplification suivante : $x \ln((x+2)^2) = 2x \ln(x+2)$ car $x+2$ peut être négatif.

On fait attention ici la fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ puisque la fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et que $(x+2)^2 \geq 0$ et s'annule en -2 .

(d) Correction $\boxed{+}$ Par composition $x \mapsto \ln((x+2)^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Par produit la fonction f est dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = \ln((x+2)^2) + \frac{2x(x+2)}{(x+2)^2}$$

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction $x \mapsto x+5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Par composition la fonction $x \mapsto \ln(x+5)$ est dérivable si $x > -5$.

(e) Correction $\boxed{+}$ Par composition la fonction f est dérivable si $x > -5$ et $\ln(x+5) > 0$

$\ln(x+5) > 0 \Leftrightarrow x+5 > 1 \Leftrightarrow x > -4$.

Donc la fonction f est dérivable sur $D =]-4, +\infty[$.

Pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+5)}} \times \frac{1}{x+5}$$

f est la somme de deux fonctions.

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ donc par composition $x \mapsto \sqrt{3x+2}$ est dérivable en x si $3x+2 > 0$ donc si $x > -\frac{2}{3}$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ donc par composition $x \mapsto \ln(4x+3)$ est dérivable en x si $4x+3 > 0$ donc si $x > -\frac{3}{4}$.

Comme quotient $x \mapsto \frac{2x+5}{\ln(4x+3)}$ est dérivable en x si $x > -\frac{3}{4}$ et $\ln(4x+3) \neq 0$

(f) Correction + $\ln(4x+3) = 0 \Leftrightarrow 4x+3 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Donc la fonction f est dérivable sur $D = \left] -\frac{3}{4}, +\infty \right[\setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} + \frac{2\ln(4x+3) - \frac{8x+20}{4x+3}}{(\ln(4x+3))^2} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} + \frac{2\ln(4x+3)(4x+3) - (8x+20)}{(4x+3)(\ln(4x+3))^2} \end{aligned}$$

La fonction f est le produit de deux fonctions.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $2x^2+5 > 0$ donc par composition $x \mapsto \sqrt{2x^2+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (la fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$).

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto 6x+2$ aussi donc par composition

(g) Correction + $x \mapsto e^{6x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par produit f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2e^{6x+2}}{\sqrt{2x^2+5}} + 6e^{6x+2}\sqrt{2x^2+5}$$

Exercice 6:

En utilisant une fonction :

On étudie la fonction $f : x \mapsto x - 2\ln(x)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$ qui est strictement positive pour $x > 2$ et strictement négative pour $0 < x < 2$.

(a) Correction + Donc f est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Or $2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2)) = 2(\ln(e) - \ln(2))$. Or $e > 2$ donc $1 > \ln(2)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ $x - 2\ln(x) \geq f(2) > 0$. D'où l'inégalité de l'énoncé

On étudie la fonction $f : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

(b) Correction + Or $1 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x$ car $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

Or $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 + e^{-x} \geq 0$. D'où l'inégalité de l'énoncé.

On étudie deux fonctions $f : x \mapsto x - \sin(x)$ et $g : x \mapsto \sin(x) - \frac{2x}{\pi}$.

Ces deux fonctions sont dérivables sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0 \text{ et } g'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi}.$$

Comme $f(0) = 0$ et f strictement croissante sur I alors pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) \geq 0$ donc $\sin(x) \leq x$.

La fonction g' est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

(c) Correction $\boxed{+}$ $g''(x) = -\sin(x)$. Sur I le sinus étant positif, pour tout $x \in I$ $g''(x) \leq 0$.

Donc g' est décroissante sur I . $g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} < 0$.

D'après le théorème de la bijection il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g'(\alpha) = 0$ et pour tout $x \in [0, \alpha]$, $g'(x) > 0$ et pour tout $x \in \left] \alpha, \frac{\pi}{2} \right[$.

Donc g est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2} \right]$.

Or $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Donc (on peut dessiner le tableau de variation de g) pour tout $x \in I$, $g(x) \geq 0$

Donc pour tout $x \in I$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$

0 est solution. En effet $2^0 = 1 \geq 0^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, $2^n > 0$ et $n^2 > 0$.

$$2^n \geq n^2 \Leftrightarrow n \ln(2) \geq 2 \ln(n) \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{2} \geq \frac{\ln(n)}{n}$$

Etudions la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $I = [1, +\infty[$.

La fonction est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

(d) Correction $\boxed{+}$

Et $1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e \geq x$

Donc f croît sur $[1, e]$ et décroît sur $[e, +\infty[$.

Donc l'inégalité est vraie pour 1 et 2.

$$\text{Calculons } f(4) = \frac{2 \ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Les variations de la fonction implique que :

$$f(3) > f(4).$$

Et pour tout $n \geq 4$, $f(n) < f(4) = f(2)$.

Donc l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf pour $n = 3$.