

Exercice 1:

De quelle fonction, les fonctions suivantes sont-elles les primitives ?

- (a) Correction + Il suffit de dériver la fonction :
 $x \mapsto (2x-2)e^x + (x^2-2x+1)e^x + \frac{1}{x^2} = (x^2-1)e^x + \frac{1}{x^2}$
- (b) Correction + Il suffit de dériver la fonction :
 $x \mapsto \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+2}}$
- (c) Correction + Il suffit de dériver la fonction :
 $x \mapsto \ln(x^2-1) + \frac{2x(x+1)}{x^2-1} = \ln(x^2-1) + \frac{2x}{x-1}$

Exercice 2:

Déterminer quand c'est possible une primitive de

- (a) Correction + Sur $\mathbb{R}$
 $x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{3x^8}{8}$
- (b) Correction + Sur $\mathbb{R}_*^+$ (à cause de la racine carrée). On réécrit la fonction :
 $x \mapsto x + \frac{1}{x^6} - \frac{3}{\sqrt{x}} = x + x^{-6} - \frac{3}{\sqrt{x}}$
 Une primitive : $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-5}}{-5} - 6\sqrt{x} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5x^5} - 6\sqrt{x}$
- (c) Correction + Sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou sur $\mathbb{R}_*^-$) (à cause du $\frac{1}{x}$). On réécrit la fonction :
 Une primitive : $x \mapsto x^2 + \frac{3x^7}{7} + \ln(|x|)$
- (d) Correction + Sur $\mathbb{R}$. La forme produit ne nous permet pas de conclure directement :
 $x \mapsto (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$
 Une primitive : $x \mapsto \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$.
- (e) Correction + Sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou sur $\mathbb{R}_*^-$) à cause du $\frac{1}{x^2}$. Une primitive : $x \mapsto \frac{4}{3x}$
- (f) Correction + Sur $\mathbb{R}$
 Une primitive :
 $x \mapsto -\cos(x) - 2\sin(x) + \frac{5x^2}{2}$
- (g) Correction + Sur $\mathbb{R}_*^+$ (ou sur $\mathbb{R}_*^-$) à cause du $\frac{1}{x}$.
 $\frac{3x+2}{x} = 3 + \frac{2}{x}$ Une primitive :
 $x \mapsto 3x + 2\ln(|x|)$
- (h) Correction + La fonction racine est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle admet des primitive sur $\mathbb{R}_+$.
 Pour trouver une primitive de $x \mapsto x\sqrt{x}$, on utilise la fonction $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
 En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$
 Une primitive de $x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est
 $x \mapsto \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$
 La primitive est en fait valable sur $\mathbb{R}^+$ (on peut en effet montrer que cette fonction est dérivable en 0).

Exercice 3:

Déterminer les réels α, β et γ , la fonction f pour que la dérivée de la fonction h soit égale à g (donc pour que $h' = g$).
 Pour (f) et (g), on vous aide un peu moins que pour les précédents.

(a) Correction $\boxed{+}$ $h : x \mapsto \frac{2}{3} \ln(|1 + 3x|)$

(b) Correction $\boxed{+}$ $h : x \mapsto \frac{2}{15}x^5 + \frac{5}{12}x^{12}$

(c) Correction $\boxed{+}$ $h : x \mapsto \frac{-4}{3(3x + 5)}$

(d) Correction $\boxed{+}$ $h : x \mapsto 3 \ln(|x^2 + x - 3|)$

(e) Correction $\boxed{+}$ $h : x \mapsto -\cos(\ln(x))$

La fonction s'écrit $g : x \mapsto (3e^x + 3)(e^x + x)^{-5}$

(f) Correction $\boxed{+}$ On reconnaît la dérivée d'une composée du type $u'u^{-5}$ à ajuster au niveau du coefficient multiplicatif :

$$h : x \mapsto -\frac{3}{4}(e^x + x)^{-4}$$

(g) Correction $\boxed{+}$ On reconnaît la dérivée d'une composée du type $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ à ajuster au niveau du coefficient multiplicatif :

$$h : x \mapsto \frac{9}{2}\sqrt{2x^2 + 1}$$

Exercice 4:

Déterminer si possible une primitive de

(a) Correction $\boxed{+}$ On reconnaît la dérivée d'une fonction de type $x \mapsto \alpha e^{3x^2+2}$.
En dérivant cette fonction et en identifiant on trouve $\alpha = -\frac{1}{3}$.

Une primitive est donc $x \mapsto -\frac{1}{3}e^{3x^2+2}$.

Elle est valide sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que la dérivée du dénominateur donne $8x^3 + 2x = 2(4x^3 + x)$. La fonction est donc du type $\frac{u'}{2u}$.

(b) Correction $\boxed{+}$ Une primitive est donc $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|2x^4 + x^2|) = \frac{1}{2} \ln(2x^4 + x^2)$ qui est valide pour $2x^4 + x^2 > 0$ ce qui revient à $2x^4 + x^2 \neq 0$ ce qui revient à $x \neq 0$.

Notre primitive est donc valide sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$.

Ici on aurait envie de dire que l'on a faire à la dérivée d'une fonction du type e^u avec $u(x) = 3x^2$ mais la dérivée de $x \mapsto 3x^2$ est $x \mapsto 6x$: il manque le carré.

Une erreur serait de d'appliquer la méthode classique et dire : je cherche sous forme $x \mapsto \alpha e^{3x^2}$ avec α constante. On trouverait $\alpha = x$. Or ce n'est pas une constante et pour dériver xe^{3x^2} il faut dériver un produit.

Une idée possible serait de faire une intégration par parties :

On ne connaît pas de primitive de $x \mapsto e^{3x^2}$ donc il faut le dériver et il faut primitiver $x \mapsto 6x^2 : x \mapsto 2x^3$. On aurait alors (sans mettre les bornes sur l'intégrale)

$$\int 6x^2 e^{3x^2} dx = [2x^3 e^{3x^2}] - \int 2x^3 \times 6xe^{3x^2}$$

(c) Correction +

La deuxième intégrale n'est pas plus calculable.

On peut réfléchir à une décomposition différente : $6x^2 e^{3x^2} = x \times 6xe^{3x^2}$

On peut alors primitiver $x \mapsto 6xe^{3x^2}$ ($x \mapsto e^{3x^2}$) et dériver $x \mapsto x$. Ce qui donnerait

$$\int 6x^2 e^{3x^2} dx = [xe^{3x^2}] - \int e^{3x^2}$$

Mais l'intégrale à droite n'est pas non plus calculable.

On ne peut pas trouver l'expression explicite d'une primitive. On peut juste donner l'expression suivante

$$x \mapsto \int_0^x 6t^2 e^{3t^2} dt$$

Une racine carrée au dénominateur doit nous faire penser à la dérivée de $\sqrt{u}$.

Ici on aurait $u(x) = 2 - 3\sin(x)$ qui a pour dérivée $x \mapsto -3\cos(x)$.

Donc en cherchant la primitive sous la forme $\alpha\sqrt{u}$, sa dérivée étant $\frac{\alpha u'}{2\sqrt{u}}$, il suffit de prendre

(d) Correction +

$$\alpha = -\frac{2}{3}.$$

Une primitive est donc $x \mapsto -\frac{2}{3}\sqrt{2 - 3\sin(x)}$.

Le domaine de validité n'est pas facile à déterminer.

L'exemple est un peu plus difficile car il faut se rendre compte que ("astuce" très classique quand on a du ln dans l'expression) :

(e) Correction +

$$\frac{1}{x(\ln(x))^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

On reconnaît une expression du type $\frac{u'}{u^2}$ dont une primitive est $-\frac{1}{u}$ (on n'oublie pas le $-$).

Une primitive est donc $x \mapsto -\frac{1}{\ln(x)}$ qui est valide sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Dérivons le dénominateur : $x \mapsto 2x - 5$. L'expression donnée est donc du type $\frac{2u'}{u}$.

(f) Correction +

Une primitive est donc $x \mapsto \ln(|x^2 - 5x + 6|)$.

Les racines du polynôme sont 3 et 2. Donc la primitive est valide sur $] -\infty, 2[$, $]2, 3[$ et $]3, +\infty[$.

Remarquons que $x \mapsto \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^5} = \sin(x)(\cos(x))^{-5}$

(g) Correction +

La dérivée de cos est $-\sin$. On a donc une dérivée du type $-u'u^{-5}$. Une primitive est donc $x \mapsto \frac{(\cos(x))^{-4}}{4} = \frac{1}{4\cos^4(x)}$ valide sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par exemple.

On aurait envie de voir dans l'expression la dérivée de $\sin(u)$ avec $u(x) = x^2$.

Mais la dérivée de $x \mapsto \sin(x^2)$ est $x \mapsto 2x \cos(x^2)$.

En remarquant que $(3x + 1) \cos(x^2) = 3x \cos(x^2) + \cos(x^2)$

On a donc facilement une primitive de $x \mapsto 3x \cos(x^2)$ qui est $x \mapsto \frac{3}{2} \sin(x^2)$.

La question revient donc à déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(x^2)$.

La fonction n'est pas sous la forme d'une composée. On peut envisager une intégration par parties : on n'a qu'un choix possible : dériver $x \mapsto \cos(x^2)$ et primitiver $x \mapsto 1$

(h) Correction + On aurait alors (sans mettre les bornes sur l'intégrale)

$$\int \cos(x^2) dx = [x \cos(x^2)] - \int 2x^2 \cos(x^2) dx$$

L'intégrale de droite n'est pas plus facile à calculer.

On ne peut pas trouver l'expression explicite d'une primitive. On peut juste donner l'expression suivante

$$x \mapsto \frac{3}{2} \sin(x^2) + \int_0^x \cos(t^2) dt$$

Réécrivons la fonction différemment :

$$\frac{\sin(x) + 1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(i) Correction + On remarque qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ est $x \mapsto \tan(x)$

et la dérivée de $\cos$ est $-\sin$. Une primitive du terme de gauche est donc $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$.

Une primitive de la fonction est donc :

$$x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} + \tan(x) \text{ valide par exemple sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

On reconnaît une dérivée du type $u'u$ avec $u(x) = \sin(x)$

Une primitive est donc $\frac{\sin^2(x)}{2}$ valide sur $\mathbb{R}$.

(j) Correction + Remarquons que l'on aurait pu prendre $u(x) = \cos(x)$ et qu'on aurait trouvé $x \mapsto -\frac{\cos^2(x)}{2}$.

Mais comme $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ on a $\frac{1}{2} - \frac{\cos^2(x)}{2} = \frac{\sin^2(x)}{2}$. La dérivée d'une constante étant nulle on a bien que $x \mapsto -\frac{\cos^2(x)}{2}$ et $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{2}$ admettent la même dérivée.

La dérivée de $x \mapsto 2x + 7$ est $x \mapsto 2$. On reconnaît une dérivée du type $u'u^6$ donc on cherche une primitive du type $x \mapsto \alpha \frac{(2x + 7)^7}{7}$.

(k) Correction + Donc $\alpha = \frac{1}{2}$.

Une primitive est donc $x \mapsto \frac{(2x + 7)^7}{14}$ valide sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto \ln(|x|)$.

(l) Correction + On cherche une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$ sous la forme $x \mapsto \alpha \sqrt{2x - 3}$. En dérivant cette expression et en identifiant on trouve $\alpha = 1$.

Donc une primitive est $x \mapsto \sqrt{2x - 3} + \ln(|x|)$

La primitive est valide pour $x > \frac{3}{2}$ (à cause de la racine carrée) on peut donc enlever les valeurs absolues de le logarithme.

On remarque que la dérivée de $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

(m) Correction + Donc la fonction est du type $-u'u^4$. Une primitive est donc $x \mapsto -\frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5$ valide sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$.

Une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est $\sin$.

- (n) Correction + Pour le premier terme on peut chercher une primitive sous la forme $x \mapsto \alpha \sqrt{3x^2 + 1}$. En dérivant l'expression on obtient $x \mapsto \frac{6\alpha x}{2\sqrt{3x^2 + 1}}$ donc on prend $\alpha = \frac{5}{3}$.

Une primitive est donc $x \mapsto \frac{5}{3} \sqrt{3x^2 + 1} - \sin(x)$ valide sur $\mathbb{R}$

Une primitive de $x \mapsto \frac{7}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{7}{x}$.

- (o) Correction + On repère l'exponentielle dans le terme de droite donc on va chercher une primitive sous la forme αe^u avec $u(x) = \sqrt{x+1}$. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Ce qui nous donne $\alpha = 10$.

Une primitive est donc :

$x \mapsto 10e^{\sqrt{x+1}} - \frac{7}{x}$ valide sur $] -1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

La puissance 7 nous invite à voir dans l'expression une expression du type $u'u^7$ avec $u(x) = 5x^3 + 15x$. Si on dérive u on obtient $x \mapsto 15x^2 + 15 = 5(3x^2 + 3)$

- (p) Correction + On cherche une primitive sous la forme $x \mapsto \alpha \frac{(5x^3 + 15x)^8}{8}$

On trouve $x \mapsto \frac{(5x^3 + 15x)^8}{40}$ valide sur $\mathbb{R}$.

On a un quotient. Dérivons le dénominateur : $x \mapsto -\sin(x) + 5x^4$.

- (q) Correction + On a donc une expression du type $\frac{-3u'}{u}$. Une primitive est donc $x \mapsto -3 \ln(|\cos(x) + x^5|)$. Pour trouver le domaine de validité il faudrait trouver quand $\cos(x) + x^5$ s'annule. Ce n'est pas possible explicitement.

On peut réécrire l'expression :

$$\frac{4 \sin(x) - 2 \tan^2(x)}{(\tan(x) - x + 2 \cos(x))^3} = (4 \sin(x) - 2 \tan^2(x))(\tan(x) - x + 2 \cos(x))^{-3}$$

- (r) Correction + Cette puissance -3 nous invite à voir dans l'expression du $u'u^{-3}$ avec $u(x) = \tan(x) - x + 2 \cos(x)$. Dérivons u : $x \mapsto 1 + \tan^2(x) - 1 - 2 \sin(x) = \tan^2(x) - 2 \sin(x)$ ce qui multiplié par -2 donne le numérateur.

Une primitive est donc $x \mapsto \frac{-2(\tan(x) - x + 2 \cos(x))^{-2}}{-2} = \frac{1}{(\tan(x) - x + 2 \cos(x))^2}$

Exercice 5:

A l'aide d'une intégration par parties déterminer la primitive des fonctions suivantes qui s'annule en 1.

On ne rédige pas les justifications (fonctions $\mathcal{C}^1$ etc.)

On va procéder par intégration par parties.

On dérive $x \mapsto \sin(2x)$ et on primitive $x \mapsto e^{-x}$

$$\int_1^x \sin(2t)e^{-t} dt = [-e^{-t} \sin(2t)]_1^x + 2 \int_1^x \cos(2t)e^{-t} dt$$

On refait une intégration par parties pour l'intégrale de droite : on dérive $t \mapsto \cos(2t)$ et on primitive $t \mapsto e^{-t}$

$$\int_1^x \sin(2t)e^{-t} dt = [-e^{-t} \sin(2t)]_1^x + 2 \left([-e^{-t} \cos(2t)]_1^x - 2 \int_1^x \sin(2t)e^{-t} dt \right)$$

(a) Correction $\boxed{+}$ Donc :

$$\int_1^x \sin(2t)e^{-t} dt = -4 \int_1^x \sin(2t)e^{-t} dt + [-e^{-t} \sin(2t)]_1^x + 2[-e^{-t} \cos(2t)]_1^x$$

Donc

$$\int_1^x \sin(2t)e^{-t} dt = \frac{[-e^{-t} \sin(2t)]_1^x + 2[-e^{-t} \cos(2t)]_1^x}{5}$$

Donc la primitive cherchée est :

$$x \mapsto \frac{-e^{-x} \sin(2x) + e^{-1} \sin(2) - 2e^{-x} \cos(2x) + 2e^{-1} \cos(2)}{5}$$

On ne rédige pas les justifications (fonctions $\mathcal{C}^1$ etc.)

On veut calculer

$$\int_0^t (x+1)\sqrt{1-x} dx$$

On effectue une intégration par parties

On va dériver $x \mapsto x+1$ et primitiver $x \mapsto \sqrt{1-x}$ (ce qui donne, comme $\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$, $x \mapsto \frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}$).

$$\int_0^t (x+1)\sqrt{1-x} dx = \left[\frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}(x+1) \right]_0^t + \int_0^t \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} dx$$

(b) Correction $\boxed{+}$ Donc :

$$\int_0^t (x+1)\sqrt{1-x} dx = \left[\frac{-2}{3}(1-x)^{3/2}(x+1) \right]_0^t + \left[-\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}(1-x)^{5/2} \right]_0^t$$

La primitive cherchée est donc

$$t \mapsto \frac{-2}{3}(1-t)^{3/2}(t+1) + \frac{2}{3} - \frac{4}{15}(1-t)^{5/2} + \frac{4}{15}$$

$$t \mapsto \frac{-2}{3}(1-t)^{3/2}(t+1) - \frac{4}{15}(1-t)^{5/2} + \frac{14}{15}$$

On ne rédige pas les justifications (fonctions $\mathcal{C}^1$ etc.)

On veut calculer

$$\int_1^t x^2 \ln(x) dx$$

On effectue une intégration par parties en dérivant $\ln$ et en primitivant $x \mapsto x^2$.

(c) Correction +

$$\int_1^t x^2 \ln(x) dx = \left[\ln(x) \frac{x^3}{3} \right]_1^t - \int_1^t \frac{x^2}{3} dx$$

donc

$$\int_1^t x^2 \ln(x) dx = \left[\ln(x) \frac{x^3}{3} \right]_1^t - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^t$$

donc la primitive cherchée est

$$t \mapsto \ln(t) \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{9} + \frac{1}{9}$$