

Fiche de calcul exponentielle logarithme - correction

Exercice 1:

Simplifier, quand cela est possible, les expressions suivantes :

(a) Correction $\boxed{+}$ $\ln(9) - \ln(8) + \ln(6) - \ln(15) + \ln(5) = \ln(3^2) - \ln(2^3) - \ln(2 \times 3) - \ln(3 \times 5) + \ln(5) = 2\ln(3) - 3\ln(2) - \ln(2) - \ln(3) - \ln(3) - \ln(5) + \ln(5) = -5\ln(2).$

(b) Correction $\boxed{+}$ $\ln\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) - \ln\left(\frac{4x+2}{x^2-9}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2x+1}{x+3}}{\frac{4x+2}{x^2-9}}\right) = \ln\left(\frac{(2x+1)(x^2-9)}{(x+3)(4x+2)}\right) = \ln\left(\frac{(2x+1)(x-3)(x+3)}{2(x+3)(2x+1)}\right) = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$

(c) Correction $\boxed{+}$ $\frac{e^{3x+2}e^{-2x}}{e^{9x+6}e^{-16x}} = \frac{e^{x+2}}{e^{-7x+6}} = e^{8x-4}$

(d) Correction $\boxed{+}$ $\frac{e^{-\ln(x)} + x}{e^{2\ln(x)+1}} = \frac{\frac{1}{e^{\ln(x)}} + x}{e^{(e^{\ln(x)})^2}} = \frac{\frac{1}{x} + x}{ex^2} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{ex^2} = \frac{x^2+1}{ex^3}$

(e) Correction $\boxed{+}$ $\ln(3e^{7t}) - 21t = \ln(3) + \ln(e^{7t}) - 21t = \ln(3) + 7t - 21t = \ln(3) - 14t.$

(f) Correction $\boxed{+}$ $\frac{e^{\ln(x^2)\ln(x^3)} - e^{\ln(x^4)\ln(x^6)}}{e^{\ln(x)^2(e^{2\ln(x)^2} + e^{11\ln(x)^2})}} = \frac{e^{6(\ln(x))^2} - e^{24(\ln(x))^2}}{e^{3(\ln(x))^2} + e^{12(\ln(x))^2}}$
 $= \frac{(e^{3(\ln(x))^2})^2 - (e^{12(\ln(x))^2})^2}{e^{3(\ln(x))^2} + e^{12(\ln(x))^2}}$
 $= \frac{(e^{3(\ln(x))^2} - e^{12(\ln(x))^2})(e^{3(\ln(x))^2} + e^{12(\ln(x))^2})}{e^{3(\ln(x))^2} + e^{12(\ln(x))^2}} = e^{3(\ln(x))^2} - e^{12(\ln(x))^2}$

(g) Correction $\boxed{+}$ $\ln\left(e^{x^2-x} + e^{1-x} + \frac{1}{e^{x-2}}\right) + x - \ln\left(e^{x^2-1} + 1 + e\right)$
 $= \ln\left(e^{-x}\left(e^{x^2} + e + e^2\right)\right) + x - \ln\left(e^{x^2-1} + 1 + e\right)$
 $= \ln(e^{-x}) + \ln(e^{x^2} + e + e^2) + x - \ln(e^{x^2-1} + 1 + e)$
 $= -x + x + \ln(e^{x^2} + e + e^2) - \ln(e^{-1}(e^{x^2} + e + e^2))$
 $= \ln(e^{x^2} + e + e^2) + 1 - \ln(e^{x^2} + e + e^2) = 1$

Exercice 2:

Quelles sont les expressions égales ? Le prouver

(a) $\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{e^x}{1+e^x}$

(b) $e^{-x+\ln(1)} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

(c) $1 + e^x$

(d) $\frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$

(e) $\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

Correction $\boxed{+}$ (f) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

(g) $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

(h) $\frac{e^{2x} - e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x(e^x - 1)}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$

(i) $\frac{1}{e^x}$

On a donc $a) = g), b) = i), f) = e), d) = h)$. $c)$ n'est égal à aucun des autres formes.

Exercice 3:

Déterminer une autre expression de $\ln(1 + e^t) - t$ sous forme du logarithme d'une expression. L'égalité doit être valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Correction $\boxed{+}$ $\ln(1 + e^t) - t = \ln(e^t(e^{-t} + 1)) - t = t + \ln(e^{-t} + 1) - t = \ln(e^{-t} + 1)$

Exercice 4:

Résoudre :

L'équation est valide sur $\mathbb{R}$.

(a) Correction $\boxed{+}$ Soit $x \in \mathbb{R}$,
 $\frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x = 1 + e^x \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

L'équation est valide sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 2 = 0 \text{ et } X = e^x$$

(b) Correction $\boxed{+}$ $\Leftrightarrow (X = -1 \text{ ou } X = 2) \text{ et } X = e^x$ (Les racines du polynômes sont évidentes)
 $\Leftrightarrow e^x = -1 \text{ ou } e^x = 2$
 $\Leftrightarrow e^x = 2$
 $\Leftrightarrow x = \ln(2)$

$$e^x + 3e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} + 3 = 4e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 4X + 3 = 0 \text{ et } X = e^x$$

(c) Correction $\boxed{+}$ $\Leftrightarrow (X = 1 \text{ ou } X = 3) \text{ et } X = e^x$
 $\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3$
 $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln(3)$

L'équation est valide pour $x > 4$, $x > 3$ et $5x + 4 > 0$ (donc $x > -\frac{4}{5}$).

Donc l'équation est valide pour $x > 4$. Soit $x \in]4, +\infty[$.

$$\ln(x - 4) + \ln(x - 3) = \ln(5x + 4) \Leftrightarrow \ln(x - 4) + \ln(x - 3) - \ln(5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(x - 4)(x - 3)}{5x + 4}\right) = 0.$$

(d) Correction $\boxed{+}$ On applique l'exponentielle à l'égalité qui est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 $\ln\left(\frac{(x - 4)(x - 3)}{5x + 4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 4)(x - 3)}{5x + 4} = 1 \Leftrightarrow (x - 4)(x - 3) = 5x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 5x + 4$
 $\Leftrightarrow x^2 - 12x + 8 = 0$

Le discriminant est $\Delta = 144 - 32 = 112 = 16 \times 7$. Les solutions sont donc :

$$\frac{12 + 4\sqrt{7}}{2} = 6 + 2\sqrt{7} \text{ et } \frac{12 - 4\sqrt{7}}{2} = 6 - 2\sqrt{7}$$

L'équation est valide pour $x > -1$.

(e) Correction $\boxed{+}$ Soit $x \in]-1, +\infty[$,
On applique l'exponentielle à l'égalité qui est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 $\ln(1 + x) = -1 \Leftrightarrow 1 + x = e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1} - 1$

L'équation est valide sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln\left(\frac{1 + e^{2x}}{1 + e^{-2x}}\right) = \frac{1}{2} \ln(e^{4x} + e^{-2x}) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}(1 + e^{-2x})}{1 + e^{-2x}}\right) = \frac{1}{2} \ln(e^{4x}(1 + e^{-6x}))$$

(f) Correction $\boxed{+}$ $\Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \frac{1}{2}(4x + \ln(1 + e^{-6x})) \Leftrightarrow 4x = 4x + \ln(1 + e^{-6x}) \Leftrightarrow 0 = \ln(1 + e^{-6x})$
 $\Leftrightarrow 1 = 1 + e^{-6x} \Leftrightarrow e^{-6x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

où on a appliqué l'exponentielle à l'égalité qui est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5:

Résoudre :

L'équation est valide sur $\mathbb{R}_*^+$.

- (a) Correction + Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$,
 $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 L'ensemble des solutions est $]1, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc :

$$e^{x^2-1} \leq e^x \Leftrightarrow e^{x^2-1-x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \leq 0$$

- (b) Correction + Car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Le polynôme a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$. Les racines sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Le coefficient dominant étant positif l'ensemble des solutions est donc $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

L'équation est valide pour $x > 0$ et $1 + \ln(x) \neq 0$ c'est à dire $\ln(x) \neq -1$ c'est à dire $x \neq e^{-1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{e^{-1}\}$

$$\frac{\ln(x)}{1+\ln(x)} < -3 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{1+\ln(x)} + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x) + 3 + 3\ln(x)}{1+\ln(x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{4\ln(x) + 3}{1+\ln(x)} < 0$$

On pose $A(x) = \frac{4\ln(x) + 3}{1+\ln(x)}$.

Faisons une étude de signe.

$$1 + \ln(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq -1 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}$$

$$4\ln(x) + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x \leq e^{-\frac{3}{4}}$$

En utilisant le fait que l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ pour l'appliquer aux inégalités.

- (c) Correction + Cette propriété nous permet aussi de dire que $0 < e^{-1} < e^{-\frac{3}{4}}$

x	0	e^{-1}	$e^{-\frac{3}{4}}$	$+\infty$
$4\ln(x)+3$		−	−	+
$1+\ln(x)$		−	+	+
$A(x)$		+	−	+

L'ensemble des solutions est donc $]e^{-1}, e^{-\frac{3}{4}}[$.

$$e^{2x} + 3e^x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 \leq 0 \text{ et } X = e^x.$$

Les racines du polynômes sont 1 et -4 et le coefficient dominant étant positif $X^2 + 3X - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq X \leq 1$

Donc :

- (d) Correction + $e^{2x} + 3e^x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 4 \leq 0$ et $X = e^x$

$$\Leftrightarrow -4 \leq e^x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 0$$

L'ensemble des solutions est $\mathbb{R}_*^+$.

L'inéquation est valide pour $x > 1$.

Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$\ln(x) + \ln(x-1) \leq \ln(1+x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x(x-1)}{x+1}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x+1} \leq 1 \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1) - x - 1}{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \text{ car pour } x > 1, x+1 > 0.$$

Le polynôme a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$ et racines $\frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$.

Le coefficient dominant étant positif l'ensemble des solutions est $]1, 1 + \sqrt{2}]$ (puisque $1 - \sqrt{2} < 1$)

L'équation est valide pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{1+x} > 0$

Or $1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Donc l'équation est valide sur $] -\infty, -1[\cup \mathbb{R}_*^+$

Soit $x \in] -\infty, -1[\cup \mathbb{R}_*^+$

$$\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} > 1 \text{ car } x \mapsto \exp(x) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-x}{1+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < 0$$

$$\Leftrightarrow 1+x < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1$$

Donc l'ensemble des solutions est $] -\infty, -1[$.

(e) Correction +

(f) Correction +