Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C- Madame MOREL

TP 2

Boucle FOR – sommes

I. Sommes simples

Exercice 1 (somme d'Euler)

1. Écrire une fonction `somme_n_premiers_entiers` qui calcule la somme S_n des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Tester sur plusieurs valeurs de n pour valider le résultat :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Exercice 2 (somme de Riemmann)

Pour tout entier naturel n non nul on pose: $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$.
Ecrire une fonction `suite(n)` qui calcule et affiche u_n pour tout entier n non nul.
En utilisant cette fonction `suite`, en déduire une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit : $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.
Ecrire un programme `Python` qui permet de conjecturer la limite de cette suite quand n tend vers $+\infty$.

II. Séries usuelles de deuxième année

Exercice 4 (série harmonique)

Pour tout entier n non nul, on définit la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Ecrire une fonction `somme(n)` qui renvoie la valeur de S_n pour tout entier naturel n non nul.
2. En utilisant cette fonction `somme`, émettre une conjecture sur la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
3. On décide de faire calculer S_n à l'ordinateur d'une autre manière:

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}\,.$$

   (a) Ecrire une autre fonction `sommebis(n)` qui renvoie la valeur de S_n pour tout entier naturel n non nul.
   (b) Comparer les valeurs de `somme(n)` et `sommebis(n)` pour de grandes valeurs de `n`.
   (c) Commentez.

Exercice 5 (série géométrique)

Pour tout entier n et tout réel q, on définit la somme $S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

1. Ecrire une fonction de paramètres `n,q` qui calcule la valeur de $S_n(q)$.
2. Que vaut $S_n(1)$?
3. Dans cette question, $q \in]-1,1[$.
   En utilisant la fonction de la question 1., émettre une conjecture sur la convergence de $S_n(q)$ quand n tend vers $+\infty$.
   Démontrer votre résultat.
4. Dans cette question, $q > 1$.
   En utilisant la fonction de la question 1., émettre une conjecture sur la limite de $S_n(q)$ quand n tend vers $+\infty$.
   Démontrer votre résultat.
5. Dans cette question, $q \leqslant -1$. Que pouvez-vous dire sur la limite de $S_n(q)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 6 (série exponentielle)

Pour tout entier n et tout réel x, on définit la somme $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Ecrire une fonction des variables (n,x) qui calcule la valeur de $S_n(x)$.
2. Comparer $S_n(1)$ et e pour de grandes valeurs de n. En déduire une conjecture sur la limite de $S_n(1)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. De même, conjecturer sur la convergence de $S_n(x)$.