Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C- Madame MOREL

TP 3

Boucle FOR – suites récurrentes

I. Suites récurrentes d'ordre 1

a. Application du cours

Exercice 1 Écrire une fonction `terme(n)` qui renvoie la valeur de u_n, où :

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3n}{2n+1}$
2. $u_1 = 6$ et $\forall n \geqslant 2$, $u_n = (u_{n-1} + n)^2$

b. Conjectures

Exercice 2 Soit la suite u définie par $u_0 = 4$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. Ecrire une fonction `suite(n)` qui calcule et affiche u_n, pour $n \geqslant 2$.
2. Utiliser cette fonction `suite` afin d'émettre une conjecture sur la limite de la suite (u_n).
3. Ecrire une fonction `monotonie(n)` qui :
   - renvoie `"non monotone"` si il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $u_{k+1} - u_k$ change de signe,
   - renvoie `"monotone"` sinon.

Comment utiliser cette fonction `monotonie` pour émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n)?

Exercice 3 On la suite u définie par $u_0 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1 + u_n + 2\,e^{u_n}}{1 + 2\,e^{u_n}}$.
Écrire une fonction `suite(n)` qui calcule et affiche u_n, pour $n \geqslant 1$.
A l'aide de cette fonction, établir une démarche informatique permettant d'émettre des conjectures sur la limite de la suite (u_n) et sa monotonie.
on pourra s'inspirer de l'exercice 1.

Exercice 4 $(*)$
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit :

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n + 1 + \sqrt{n}}}} \quad \text{et} \quad v_n = u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n - 1 + \sqrt{2n+1}}}}$$

Écrire des fonctions `u` et `v` qui, appliquées à un entier $n \geqslant 2$, renvoient respectivement des valeurs approchées de u_n et v_n.
Utiliser ces fonctions pour conjecturer le comportement des suites $(u_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_n)_{n \geqslant 2}$.

II. Suites récurrentes d'ordre 2

a. Application du cours

Exercice 5 Écrire une fonction `terme(n)` qui renvoie la valeur de u_n, où :

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$
2. $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n + u_{n+1}^2}$

b. Conjectures

Exercice 6 On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$F_0 = 0 \; F_1 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 2\,,\; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,.$$

Écrire une fonction qui calcule et affiche F_n, pour tout entier n.
En déduire une conjecture sur la limite éventuelle de cette suite.