Suites usuelles

BCPST 1C – Mme MOREL

Les suites de référence étudiées dans ce chapitre sont définies par une relation de récurrence. L'objectif est de "casser" cette relation de récurrence et d'exprimer les termes des suites usuelles en fonction de n.

1 Rappels

Remarque 1 Il y a deux façons de définir une suite:
(1) **Explicite:** on peut calculer u_n directement en fonction de n.

Exemple 1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$; *suite harmonique:* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$.

(2) **Par récurrence:** on doit connaître un ou plusieurs termes précédents pour calculer u_n.

Exemple 2 :
(1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$
(2) *Suite de Fibonacci:* (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

(ce type de définition implique l'utilisation du **principe de récurrence** *dans les exercices)*

1.1 Opérations

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- la **somme** des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = u_n + v_n$.
- le **produit** des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = u_n \times v_n$.
- Si pour tout entier n, $v_n \neq 0$, le **quotient** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

1.2 Monotonie

Définition 1 **:**
(1) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** *si:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.
(2) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** *si elle est constante à partir d'un certain rang (APCR):*
$\underbrace{\exists p \in \mathbb{N}}_{\text{il existe un rang } p}\ ,\ \underbrace{\forall n \geqslant p}_{\text{à partir duquel}}\ ,\ u_n = u_p$.

Définition 2 **:**
(1) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante) ssi: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. (resp. $u_n < u_{n+1}$)
(2) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) ssi: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$. (resp. $u_n > u_{n+1}$)
(3) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (resp. strictement monotone) ssi elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Remarque 2 : ATTENTION!!
(1) Dire qu'une suite est monotone sur $[0, +\infty[$ NE VEUT RIEN DIRE!!!
(2) Une suite n'est pas forcément monotone! *Exemple:* $u_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.3 Suites bornées

Définition 3 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(1) est **minorée** *ssi il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
(2) est **majorée** *ssi il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
(3) est **bornée** *ssi elle est à la fois minorée et majorée:* $\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}\,,\ m \leqslant u_n \leqslant M$.

Exemple 3 :
(1) $u_n = (-1)^n$ est bornée ($u_n = 1$ ou $u_n = -1$).
(2) $u_n = n\,e^n$ est minorée (par 0), mais pas majorée.

Remarque 3 De façon équivalente, on peut utiliser les valeurs absolues pour exprimer qu'une suite est bornée:
$\boxed{\text{Une suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée ssi il existe } K \geqslant 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K}$

Preuve:

■

Remarque 4 : ATTENTION!
Minorant et majorant ne dépendent pas de n!!

Exemple 4 Si on a une suite u qui vérifie: $u_n \leqslant \mathrm{e}^{-n}\ \forall n \in \mathbb{N}$, en déduire que (u_n) est majorée par e^{-n} est FAUX! Par contre, puisque $u_n \leqslant \mathrm{e}^{-n} \leqslant 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, on peut dire que la suite u est majorée par 1.

Remarque 5 :
(1) Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante alors elle est minorée par ......: $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant$ ....
(2) Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante alors elle est majorée par ......: $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant$ ....

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 4 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* **arithmétique** *s'il existe* $r \in \mathbb{R}$ *tel que* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$
r *est appelé la* **raison** *de la suite.*

Une suite arithmétique est définie par son premier terme et sa raison.

Remarque 6 : ATTENTION! La raison r ne dépend pas de n

POINT METHODE 1 : comment MONTRER qu'une suite est arithmétique?
On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier n, et on doit trouver un réel **indépendant de** n: c'est la raison r.

2.2 Expression de u_n et propriétés

Proposition 1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0. *Alors:*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = u_0 + n\,r}$$

Remarque 7 Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p:

$$\forall n \geqslant p\,,\ u_n = u_p + (n-p)\,r\,.$$

Preuve:

$\blacksquare$

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : comment UTILISER qu'une suite est arithmétique?
Il faut tout de suite penser à exprimer u_n en fonction de n. C'est-à-dire utiliser la Proposition 1.

Corollaire 1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.*
(1) Si $r > 0$ alors u est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(2) Si $r < 0$ alors u est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
(3) Si $r = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$. (la suite u est stationnaire)

Preuve:

$\blacksquare$

2.3 Somme des termes consécutifs

Proposition 2 **(somme arithmétique):**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}}$$

Preuve: voir le chapitre "Sommes et Produits"

Corollaire 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors:*

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{(n+1)}_{nb\ de\ termes} \times \underbrace{\frac{u_0 + u_n}{2}}_{\frac{1er\ terme\ +\ dernier\ terme}{2}}.$$

Preuve (à savoir refaire):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (u_0 + k\,r) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ldots + \sum_{k=0}^{n} \ldots \quad \text{(on casse la somme)} \\
&= \qquad\qquad\qquad + \ldots \times \sum_{k=0}^{n} \ldots \quad \text{(on met en facteur ce qui ne dépend pas du compteur)} \\
&= \qquad\qquad\qquad + \ldots \times \frac{n\,(n+1)}{2} \quad \text{(somme arithmétique)} \\
&= (n+1)\,\frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}\,.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3 Suites géométriques

3.1 Définition

Définition 5 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **géométrique** *s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q\, u_n}$
q est appelé la **raison** *de la suite.*

Une suite géométrique est définie par son premier terme et sa raison.

Remarque 8 : ATTENTION! La raison q ne dépend pas de n

Exemple 5 Si on étudie l'évolution des bactéries dans une solution où leur population double toutes les heures, notant u_n le nombre de bactéries à l'heure n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

POINT METHODE 2 : comment MONTRER qu'une suite est géométrique?

1. On part de u_{n+1} et on mène les calculs pour aboutir à une expression de la forme réel$\times u_n$, où le réel est la raison q.
2. $\boxed{\text{SI } u_n \neq 0 \text{ pour tout entier } n}$, on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout entier n, et on doit trouver un réel **indépendant de** n: c'est la raison q.

3.2 Expression de u_n et propriétés

Proposition 3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors:*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = q^n u_0}$$

Remarque 9 Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p:

$$\forall n \geqslant p\,,\ u_n = q^{n-p}\, u_p\,.$$

Preuve:

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : comment UTILISER qu'une suite est géométrique?
Il faut tout de suite penser à exprimer u_n en fonction de n. C'est-à-dire utiliser la Proposition 3.

Proposition 4 **(ADMISE):**
(1) si $|q| < 1$ $(-1 < q < 1)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
(2) si $|q| > 1$ $(q < -1$ ou $q > 1)$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, plus précisément:
(2.1) si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
(2.2) si $q \leqslant -1$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Corollaire 3 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.*
(1) si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
(2) si $|q| > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, plus précisément:
(2.1) si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$.
(2.2) si $q \leqslant -1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
(3) si $q = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ (suite stationnaire).

Preuve: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n \times u_0$, donc:

■

3.3 Somme des termes consécutifs

***Proposition 5* (somme géométrique):**

$$q^0 + q^1 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \left| \begin{array}{ll} n+1 & si\ q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \end{array} \right. .$$

Remarque 10 Plus généralement:

$$\boxed{\sum_{k=n}^{m} q^k = \left| \begin{array}{ll} \text{nb de termes} = m-n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{\text{1er terme} - \text{1er terme non écrit}}{1 - \text{raison}} = \dfrac{q^n - q^{m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{array} \right.}$$

Preuve: Voir le chapitre "Sommes et Produits"

■

Corollaire 4 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*

$$u_0 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \left| \begin{array}{ll} (n+1)\,u_0 & si\ q=1 \\ u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \end{array} \right. .$$

Preuve:

■

4 Suites arithmético-géométriques

4.1 Définition

Définition 6 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **arithmético-géométrique** *s'il existe deux réels a et b tels que:*
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + b}$

Remarque 11 :
(1) si $b = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, on est donc ramenés à la partie 2.
(2) si $a = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b, on est donc ramenés à la partie 1.

4.2 Expression de u_n

Dans cette partie, on suppose donc que $\boxed{a \neq 1 \text{ et } b \neq 0}$
Pour déterminer u_n en fonction de n, l'idée est d'utiliser une suite auxiliaire qui, elle, sera géométrique.
Quel est l'intérêt de se ramener à une suite géométrique?

Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \ell$, où ℓ est un réel indépendant de n à choisir judicieusement.

$*$ Pour tout entier n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n, a et b.

$*$ Comment choisir ℓ de sorte que (v_n) soit géométrique? Préciser alors la raison de (v_n).

CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : Exprimer u_n en fonction de n.

1. **Étape 1: Recherche du point fixe (ne pas apprendre le résultat par coeur)**
   On résout dans $\mathbb{R}$: $x = a\,x + b \iff x\,(1-a) = b \underset{(a\neq 1)}{\iff} x = \dfrac{b}{1-a}$. On note $x_0 = \dfrac{b}{1-a}$.

2. **Étape 2: se ramener à une suite géométrique**

   Proposition 6 *La suite $(u_n - x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.*

   Preuve:

   ■

3. **Étape 3: utilisation de la Proposition 3.**
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - x_0 = \ldots$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - x_0) + x_0}$

   Remarque 12 Plus généralement: $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant p$, $u_n = a^{n-p}(u_p - x_0) + x_0$.

Exemple 6 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = 3u_n + 5 \end{cases}$$

$*$ Résolvons $x = 3x + 5$:

Donc la suite $(u_n - \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\ldots$, donc:

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n =$

5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

5.1 Définition

Définition 7 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **récurrente linéaire d'ordre** 2 *s'il existe deux réels a et b tels que:*
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n}$

Une telle suite est entièrement déterminée par ses deux premiers termes, au sens où deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence sont égales ssi $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.

Exemple 7 : Suite de Fibonacci.
$u_0 = u_1 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

5.2 Expression de u_n

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente linéaire d'ordre 2 définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.

Définition 8 *On appelle* **équation caractéristique** *de cette suite l'équation du second degré:*

$$x^2 = ax + b \iff x^2 - ax - b = 0\,.$$

Remarque 13 Posons-nous la question de l'intérêt de cette équation...
Cette équation permet de trouver *toutes* les suites géométriques qui vérifient la relation de récurrence de la Définition 4.
En d'autres termes:

$$(x^n)_n \text{ vérifie } \forall n \in \mathbb{N}\,,\ x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n \text{ ssi } x^2 = ax + b \ (x \text{ est solution de l'équation caractéristique})$$

Preuve:
$\boxed{\Rightarrow}$ *Pensez à fixer n...*

$\boxed{\Leftarrow}$ *On rappelle la formule* $q^{n+m} = q^n \times q^m$*...*

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 4 : Exprimer u_n en fonction de n.

1. **Étape 1: résolution de l'équation caractéristique.** On note Δ son discriminant associé.
2. **Étape 2: Expression de u_n.** Tout dépend du signe de Δ...

   (a) $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$, l'équation caractéristique a deux racines réelles, notées r_1 et r_2.

   Proposition 7 : $\boxed{\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n}$

   Remarque 14 Observez la place des quantificateurs. Que peut-on dire sur λ_1 et λ_2?

   Remarque 15 Comment déterminer λ_1 et λ_2? *Pensez à fixer n...*
   λ_1 et λ_2 sont déterminés en fonction de u_0 et u_1 car solutions du système:

$$\begin{cases} u_0 = \lambda_1 + \lambda_2 & (n = 0) \\ u_1 = \lambda_1\, r_1 + \lambda_2\, r_2 & (n = 1) \end{cases}$$

   Preuve: On suppose que λ_1 et λ_2 sont déterminés par le système.
   Montrons par récurrence DOUBLE (pourquoi?) que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n$.
   Initialisation:

   Donc la propriété est initialisée aux deux premiers rangs.
   Hérédité: Supposons qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que:
   Montrons que:

   Conclusion: par le principe de récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = \lambda_1\, r_1^n + \lambda_2\, r_2^n$.

■

   (b) $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$, l'équation caractéristique admet une racine réelle notée r_0.

Proposition 8 : $\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n = (\lambda + \mu\, n)\, r_0^n}$

Remarque 16 où λ et μ sont déterminés en fonction de u_0 et u_1 car solutions du système:

Preuve: du même type que la précédente, ADMISE.

∎

(c) $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$, voir le chapitre "Complexes"

Exemple 8 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique:

(deux racines évidentes, donc pas de Δ!)

Donc $u_n = \lambda_1 \times \ldots + \lambda_2 \times \ldots$**, avec** λ_1 **et** λ_2 **solutions du système:**

Résolution du système:

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$**,** $u_n = 1$**!!!**