

# Suites usuelles

BCPST 1C – Mme MOREL

Les suites de référence étudiées dans ce chapitre sont définies par une relation de récurrence. L'objectif est de "casser" cette relation de récurrence et d'exprimer les termes des suites usuelles en fonction de  $n$ .

## 1 Rappels

**Remarque 1** Il y a deux façons de définir une suite:

(1) **Explicite**: on peut calculer  $u_n$  directement en fonction de  $n$ .

**Exemple 1**  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2^n$ ; suite harmonique:  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n}$ .

(2) **Par récurrence**: on doit connaître un ou plusieurs termes précédents pour calculer  $u_n$ .

**Exemple 2 :**

(1) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par: 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$$

(2) Suite de Fibonacci:  $(F_n)$  définie par  $F_0 = F_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

(ce type de définition implique l'utilisation du **principe de récurrence** dans les exercices)

### 1.1 Opérations

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles.

- la **somme** des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = u_n + v_n$ .
- le **produit** des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = u_n \times v_n$ .
- Si pour tout entier  $n$ ,  $v_n \neq 0$ , le **quotient** de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n = \frac{u_n}{v_n}$ .

### 1.2 Monotonie

**Définition 1 :**

(1) Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **constante** si:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_{n+1}$ .

(2) Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang (APCR):

$$\underbrace{\exists p \in \mathbb{N}}_{\text{à partir duquel}}, \quad \underbrace{\forall n \geq p}_{\text{à partir duquel}}, \quad u_n = u_p.$$

il existe un rang  $p$  à partir duquel

**Définition 2 :**

(1) Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** (resp. **strictement croissante**) ssi:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$ . (resp.  $u_n < u_{n+1}$ )

(2) Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) ssi:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ . (resp.  $u_n > u_{n+1}$ )

(3) Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **monotone** (resp. **strictement monotone**) ssi elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

**Remarque 2 : ATTENTION!!**

(1) Dire qu'une suite est monotone sur  $[0, +\infty[$  NE VEUT RIEN DIRE!!!

(2) Une suite n'est pas forcément monotone! Exemple:  $u_n = (-1)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

### 1.3 Suites bornées

**Définition 3** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(1) est **minorée** ssi il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ .

(2) est **majorée** ssi il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ .

(3) est **bornée** ssi elle est à la fois minorée et majorée:  $\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$ .

**Exemple 3 :**

(1)  $u_n = (-1)^n$  est bornée ( $u_n = 1$  ou  $u_n = -1$ ).

(2)  $u_n = n e^n$  est minorée (par 0), mais pas majorée.

**Remarque 3** De façon équivalente, on peut utiliser les valeurs absolues pour exprimer qu'une suite est bornée:

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée ssi il existe  $M \geq 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

**Preuve:**

■

**Remarque 4 : ATTENTION!**

Minorant et majorant ne dépendent pas de  $n$ !!

**Exemple 4** Si on a une suite  $u$  qui vérifie:  $u_n \leq e^{-n} \forall n \in \mathbb{N}$ , en déduire que  $(u_n)$  est majorée par  $e^{-n}$  est FAUX! Par contre, puisque  $u_n \leq e^{-n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ , on peut dire que la suite  $u$  est majorée par 1.

**Remarque 5 :**

(1) Si la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante alors elle est minorée par .....:  $\forall n \geq n_0, u_n \geq \dots\dots$

(2) Si la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante alors elle est majorée par .....:  $\forall n \geq n_0, u_n \leq \dots\dots$

## 2 Suites arithmétiques

### 2.1 Définition

**Définition 4** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **arithmétique** s'il existe  $r \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$   
 $r$  est appelé la **raison** de la suite.

Une suite arithmétique est définie par son premier terme et sa raison.

**Remarque 6 : ATTENTION!** La raison  $r$  ne dépend pas de  $n$

**POINT METHODE 1 : comment MONTRER qu'une suite est arithmétique?**

On calcule  $u_{n+1} - u_n$  pour tout entier  $n$ , et on doit trouver un réel **indépendant de  $n$** : c'est la raison  $r$ .

### 2.2 Expression de $u_n$ et propriétés

**Proposition 1** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ . Alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n r$$

**Remarque 7** Plus généralement, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_p$ :

$$\forall n \geq p, u_n = u_p + (n - p) r.$$

Preuve:

### CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : comment UTILISER qu'une suite est arithmétique?

Il faut tout de suite penser à exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ . C'est-à-dire utiliser la Proposition 1.

**Corollaire 1** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ .

(1) Si  $r > 0$  alors  $u$  est croissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

(2) Si  $r < 0$  alors  $u$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

(3) Si  $r = 0$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ . (la suite  $u$  est stationnaire)

Preuve:

## 2.3 Somme des termes consécutifs

**Proposition 2** (somme arithmétique):

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve: voir le chapitre "Sommes et Produits"

**Corollaire 2** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ , alors:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = \underbrace{(n+1)}_{\text{nb de termes}} \times \underbrace{\frac{u_0 + u_n}{2}}_{\text{1er terme} + \text{dernier terme}} .$$

Preuve (à savoir refaire):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (u_0 + kr) \\ &= \sum_{k=0}^n \dots + \sum_{k=0}^n \dots \quad (\text{on casse la somme}) \\ &= \dots \times \sum_{k=0}^n \dots \quad (\text{on met en facteur ce qui ne dépend pas du compteur}) \\ &= \dots \times \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{somme arithmétique}) \\ &= (n+1) \frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2} . \end{aligned}$$

### 3 Suites géométriques

#### 3.1 Définition

**Définition 5** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **géométrique** s'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n}$   
 $q$  est appelé la **raison** de la suite.

Une suite géométrique est définie par son premier terme et sa raison.

**Remarque 8 : ATTENTION!** La raison  $q$  ne dépend pas de  $n$

**Exemple 5** Si on étudie l'évolution des bactéries dans une solution où leur population double toutes les heures, notant  $u_n$  le nombre de bactéries à l'heure  $n$ , exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

**POINT METHODE 2 : comment MONTRER qu'une suite est géométrique?**

1. On part de  $u_{n+1}$  et on mène les calculs pour aboutir à une expression de la forme réel  $\times u_n$ , où le réel est la raison  $q$ .
2.  $\boxed{\text{SI } u_n \neq 0 \text{ pour tout entier } n}$ , on calcule  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  pour tout entier  $n$ , et on doit trouver un réel **indépendant de  $n$** : c'est la raison  $q$ .

#### 3.2 Expression de $u_n$ et propriétés

**Proposition 3** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ . Alors:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0}$$

**Remarque 9** Plus généralement, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_p$ :

$$\forall n \geq p, u_n = q^{n-p} u_p.$$

**Preuve:**

**CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : comment UTILISER qu'une suite est géométrique?**

Il faut tout de suite penser à exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ . C'est-à-dire utiliser la Proposition 3.

**Proposition 4 (ADMISE):**

- (1) si  $|q| < 1$  ( $-1 < q < 1$ ) alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .
- (2) si  $|q| > 1$  ( $q < -1$  ou  $q > 1$ ) alors  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge, plus précisément:
  - (2.1) si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .
  - (2.2) si  $q \leq -1$  alors  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite.

**Corollaire 3** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ .

- (1) si  $|q| < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- (2) si  $|q| > 1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge, plus précisément:
  - (2.1) si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  si  $u_0 > 0$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  si  $u_0 < 0$ .
  - (2.2) si  $q \leq -1$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite.
- (3) si  $q = 1$  alors  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$  (suite stationnaire).

**Preuve:**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \times u_0$ , donc:

### 3.3 Somme des termes consécutifs

**Proposition 5** (somme géométrique):

$$q^0 + q^1 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases} .$$

**Remarque 10** Plus généralement:

$\sum_{k=n}^m q^k = \begin{cases} \text{nb de termes} = m - n + 1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{\text{1er terme} - \text{1er terme non écrit}}{1 - \text{raison}} = \frac{q^n - q^{m+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$
--

**Preuve:** Voir le chapitre "Sommes et Produits"

**Corollaire 4** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

$$u_0 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} (n+1) u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases} .$$

**Preuve:**

## 4 Suites arithmético-géométriques

### 4.1 Définition

**Définition 6** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b$$

**Remarque 11 :**

- (1) si  $b = 0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $a$ , on est donc ramenés à la partie 2.
- (2) si  $a = 1$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique de raison  $b$ , on est donc ramenés à la partie 1.

### 4.2 Expression de $u_n$

Dans cette partie, on suppose donc que  $a \neq 1$  et  $b \neq 0$

Pour déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$ , l'idée est d'utiliser une suite auxiliaire qui, elle, sera géométrique.

Quel est l'intérêt de se ramener à une suite géométrique?

Considérons la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell$ , où  $\ell$  est un réel indépendant de  $n$  à choisir judicieusement.

\* Pour tout entier  $n$ , calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ ,  $a$  et  $b$ .

\* Comment choisir  $\ell$  de sorte que  $(v_n)$  soit géométrique? Préciser alors la raison de  $(v_n)$ .

### CAPACITÉ EXIGIBLE 3 : Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .

#### 1. Étape 1: Recherche du point fixe (ne pas apprendre le résultat par coeur)

On résout dans  $\mathbb{R}$ :  $x = ax + b \iff x(1-a) = b \underset{(a \neq 1)}{\iff} x = \frac{b}{1-a}$ . On note  $x_0 = \frac{b}{1-a}$ .

#### 2. Étape 2: se ramener à une suite géométrique

**Proposition 6** La suite  $(u_n - x_0)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $a$ .

Preuve:

■

#### 3. Étape 3: utilisation de la Proposition 3.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - x_0 = \dots$ , donc  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n(u_0 - x_0) + x_0}$

**Remarque 12** Plus généralement:  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n = a^{n-p}(u_p - x_0) + x_0$ .

**Exemple 6** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 5 \end{cases}$$

\* Résolvons  $x = 3x + 5$ :

Donc la suite  $(u_n - \dots)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $\dots$ , donc:

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

## 5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

### 5.1 Définition

**Définition 7** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n}$$

Une telle suite est entièrement déterminée par ses deux premiers termes, au sens où deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la même relation de récurrence sont égales ssi  $u_0 = v_0$  et  $u_1 = v_1$ .

**Exemple 7 : Suite de Fibonacci.**

$u_0 = u_1 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ .

## 5.2 Expression de $u_n$

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  récurrente linéaire d'ordre 2 définie par ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$  et la relation de récurrence:  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ .

**Définition 8** On appelle **équation caractéristique** de cette suite l'équation du second degré:

$$x^2 = ax + b \iff x^2 - ax - b = 0.$$

**Remarque 13** Posons-nous la question de l'intérêt de cette équation...

Cette équation permet de trouver *toutes* les suites géométriques qui vérifient la relation de récurrence de la Définition 4. En d'autres termes:

$$(x^n)_n \text{ vérifie } \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n \text{ ssi } x^2 = ax + b \text{ (} x \text{ est solution de l'équation caractéristique)}$$

**Preuve:**

$\Rightarrow$  Pensez à fixer  $n$ ...

$\Leftarrow$  On rappelle la formule  $q^{n+m} = q^n \times q^m$ ...

### CAPACITÉ EXIGIBLE 4 : Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ .

1. **Étape 1: résolution de l'équation caractéristique.** On note  $\Delta$  son discriminant associé.
2. **Étape 2: Expression de  $u_n$ .** Tout dépend du signe de  $\Delta$ ...

(a)  $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ , l'équation caractéristique a deux racines réelles, notées  $r_1$  et  $r_2$ .

**Proposition 7 :**  $\boxed{\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n}$

**Remarque 14** Observez la place des quantificateurs. Que peut-on dire sur  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ?

**Remarque 15** Comment déterminer  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ? Pensez à fixer  $n$ ...

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont déterminés en fonction de  $u_0$  et  $u_1$  car solutions du système:

$$\begin{cases} u_0 = \lambda_1 + \lambda_2 & (n = 0) \\ u_1 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 & (n = 1) \end{cases}$$

**Preuve:** On suppose que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont déterminés par le système.

Montrons par récurrence DOUBLE (pourquoi?) que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ .

*Initialisation:*

Donc la propriété est initialisée aux deux premiers rangs.

*Hérédité:* Supposons qu'il existe  $n \geq 0$  tel que:

Montrons que:

*Conclusion:* par le principe de récurrence double,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ .

(b)  $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ , l'équation caractéristique admet une racine réelle notée  $r_0$ .

**Proposition 8 :**  $\boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n}$

**Remarque 16** où  $\lambda$  et  $\mu$  sont déterminés en fonction de  $u_0$  et  $u_1$  car solutions du système:

**Preuve:** du même type que la précédente, ADMISE. ■

(c)  $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ , voir le chapitre "Complexes"

**Exemple 8** Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

**Équation caractéristique:**

*(deux racines évidentes, donc pas de  $\Delta$ !)*

**Donc**  $u_n = \lambda_1 \times \dots + \lambda_2 \times \dots$ , avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  solutions du système:

**Résolution du système:**

**Conclusion:**  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1!!!$