

Suites usuelles

I. Rappels sur les suites

Exercice 1 Pour chacune des suites suivantes, calculer u_1, u_2 et u_4 .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.
3. $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 7$.
4. $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n$.

Exercice 2 Dans chacun des cas ci-dessous, exprimer a_{n+1}, a_{n-1}, a_{2n} et a_{3n-2} en fonction de n .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2n + 4$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^2 - n + 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n-2}{n+1}$.

II. Application directe du cours

Exercice 3 Pour chacune des suites ci-dessous, exprimer le terme général en fonction de n .

1. (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison $r = -3$.
2. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_2 = \frac{3}{4}$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.
3. (p_n) est une suite géométrique de premier terme $p_0 = 3$ et de raison $q = 4$.
4. (g_n) est une suite géométrique de premier terme $g_1 = 5$ et de raison $q = -2$.

Exercice 4 Exprimer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = -a_n + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$$

Exercice 5 Exprimer le terme général des suites suivantes en fonction de n :

$$\begin{cases} v_0 = 1, v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 2v_n + 3v_{n-1} \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

Exercice 6 :

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - n + 1$.
Montrer que (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - 7n + 6$.
Montrer que (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Exercice 7 Soit la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^n u_k$$

Pour tout entier n , déterminer u_n en fonction de n .

III. Suites auxiliaires : changement de suite

Exercice 8 On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est bien définie.
2. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. En déduire v_n puis u_n en fonction de n pour tout entier n .

Exercice 9 On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1. Pour tout entier n , on pose : $v_n = u_n - n + 1$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. En déduire u_n en fonction de n .

Exercice 10 On considère la suite (u_n) définie par:

$$u_0 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Soit la suite (v_n) de terme général: $v_n = u_n \sqrt{2} - n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire l'expression de v_n en fonction de n .

2. Calculer u_n en fonction de n .

3. On considère la suite (S_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Calculer S_n .

Exercice 11 On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}_+$.

On introduit alors la suite auxiliaire t définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

2. Montrer que la suite t est géométrique.
3. Expliciter alors t_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .

Exercice 12 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 4$ et la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}$$

1. Montrer que (u_n) est à termes strictement positifs.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n .
on pourra poser la suite de terme général: $v_n = \ln(u_n)$

Exercice 13 (*)

Soit (u_n) la suite définie par: $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6u_n^5$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Déterminer u_n en fonction de n pour tout entier n .

Exercice 14 (*)

Soit (u_n) la suite définie par récurrence: $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver la valeur de u_n en fonction de n pour tout entier n .

IV. Reconnaître des suites usuelles

Exercice 15 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

1. On considère la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = v_n - u_n$.
Montrer que $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
En déduire une expression de d_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
2. On considère la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = v_n + u_n$.
Montrer que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire une expression de s_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
3. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

Exercice 16 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Calculer u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 17 On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 2, v_0 = -3$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = -u_n - v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + \frac{5}{3}v_n.$$

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. Calculer u_n puis v_n en fonction de n , puis les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.