$\ln$ et $\exp$ – calculs algébriques

Remarque 1 Une formule est toujours accompagnée d'un **DOMAINE DE VALIDITÉ** !!!!

Rappel 1 ($\ln$ – **Formules**):

- $\ln(1) = \dots$; $\ln(2) \simeq \dots$
- $\ln(a\,b) = \ln a + \ln b$. **Domaine de validité** :
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$; $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$. **Domaine de validité :**
- $\ln(a^n) = n\,\ln a$. **Domaine de validité :**
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$. **Domaine de validité :**

Rappel 2 ($\exp$ – **Formules**):

- $\mathrm{e} = \exp(\dots)$; $\mathrm{e}^0 = \dots$; $e \simeq \dots$
- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ ou $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$. **Domaine de validité :**
- $\frac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$; $\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$. **Domaine de validité :**
- $\exp(n\,a) = (\exp(a))^n$ ou $\mathrm{e}^{n\,a} = (\mathrm{e}^a)^n$. **Domaine de validité :**

Rappel 3 **(on mélange !)**:

- $\ln(\mathrm{e}) = \dots$; $\mathrm{e}^{\ln 1} = \dots$
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x$. **Domaine de validité :**
- $\mathrm{e}^{\ln x} = x$. **Domaine de validité :**

Remarque 2 :
(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.
(2) $\ln(1) = 0$ mais $\ln(0)$ est une HORREUR !! (et ne sera pas toléré dans une copie)
(3) $\ln x$ n'existe que pour tout x **strictement positif**...

Exercice 1 : Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\ln 2$ ou/et de $\ln 5$:

1. $\ln(\frac{5}{4})$
2. $\ln(\sqrt{10})$
3. $\ln(64\,\mathrm{e}^3)$
4. $\ln(\frac{5}{4\,\mathrm{e}})$

Exercice 2 Exprimer avec un seul ln les nombres suivants :

1. $\ln(50) - \ln 2$.
2. $3\,\ln 2 - \ln 8 + \ln 4$.
3. $\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7})$
4. $\ln(\frac{2}{3}) + \ln(\frac{3}{4}) + \ln(\frac{4}{5})$
5. $\ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{20}\right) + \ln\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}\right)$
6. $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Exercice 3 Simplifier :

1. $\ln\left(\frac{(\mathrm{e}^3)^2}{\mathrm{e}^5}\right)$.
2. $\ln(\frac{\mathrm{e}^2}{9}) + \ln 27$
3. $\ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}+2}\right) - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}+2}\right)$
4. $\mathrm{e}^{-\ln(\ln 2)}$
5. $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^4}\right) - \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^2}\right)$
6. $\exp\left(-\frac{1}{3}\,\ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right)\right)$
7. $\ln\left(\sqrt{\exp\left(-\ln(\mathrm{e}^2)\right)}\right)$

Exercice 4 : Montrer que:

1. $\forall x > 1$, $\ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
2. $\forall x > 0$, $\ln(\sqrt{2x}) = \dfrac{\ln x + \ln 2}{2}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2+3}}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)$

Exercice 5 Écrire plus simplement (avec une seule exponentielle) les expressions suivantes: pour tout réel x :

1. $\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{1-2x}$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+3}}{\mathrm{e}^{x-1}}$
3. $\left(\mathrm{e}^{2x-1}\right)^2\,\mathrm{e}^{3x+4}$
4. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$
5. $\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}}$

Exercice 6 : Montrer que:

1. pour tout réel x:

   (a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$

   (b) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

2. $\forall x \neq 0$, $\dfrac{e^x}{e^x-1} - \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$.

Exercice 7 Pour tout réel x, on considère la fonction :

$$f(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{2} - \frac{\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2}{2}.$$

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.