

ln et exp – calculs algébriques

Remarque 1 Une formule est toujours accompagnée d'un **DOMAINE DE VALIDITÉ** !!!!

Rappel 1 (ln – Formules):

- $\ln(1) = \dots$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **Domaine de validité :**
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. **Domaine de validité :**
- $\ln(a^n) = n \ln a$. **Domaine de validité :**
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$. **Domaine de validité :**

Rappel 2 (exp – Formules):

- $e = \exp(\dots)$; $e^0 = \dots$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$ ou $e^{a+b} = e^a \times e^b$. **Domaine de validité :**
- $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$. **Domaine de validité :**
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$ ou $e^{na} = (e^a)^n$. **Domaine de validité :**

Rappel 3 (on mélange !):

- $\ln(e) = \dots$; $e^{\ln 1} = \dots$
- $\ln(e^x) = x$. **Domaine de validité :**
- $e^{\ln x} = x$. **Domaine de validité :**

Remarque 2 :

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- (2) $\ln(1) = 0$ mais $\ln(0)$ est une HORREUR !! (et ne sera pas toléré dans une copie)
- (3) $\ln x$ n'existe que pour tout x **strictement positif**...

Exercice 1 : Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\ln 2$ ou/et de $\ln 5$:

1. $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$
2. $\ln(\sqrt{10})$
3. $\ln(64e^3)$
4. $\ln\left(\frac{5}{4e}\right)$

Exercice 2 Exprimer avec un seul ln les nombres suivants :

1. $\ln(50) - \ln 2$.
2. $3 \ln 2 - \ln 8 + \ln 4$.
3. $\ln(49) + \ln(21) - \ln(3\sqrt{7})$
4. $\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right)$
5. $\ln\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^{20}\right) + \ln\left(\left(2 - \sqrt{3}\right)^{20}\right)$
6. $\ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

Exercice 3 Simplifier :

1. $\ln\left(\frac{(e^3)^2}{e^5}\right)$.
2. $\ln\left(\frac{e^2}{9}\right) + \ln 27$
3. $\ln\left(\frac{e}{e+1}\right) + \ln\left(\frac{e+1}{e+2}\right) - \ln\left(\frac{e^2}{e+2}\right)$
4. $e^{-\ln(\ln 2)}$
5. $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$
6. $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$
7. $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}\right)$

Exercice 4 : Montrer que:

$$1. \forall x > 1, \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$2. \forall x > 0, \ln(\sqrt{2x}) = \frac{\ln x + \ln 2}{2}$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x^2 + 3}}\right) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 3)$$

Exercice 5 Écrire plus simplement (avec une seule exponentielle) les expressions suivantes: pour tout réel x :

$$1. e^{2x} e^{1-2x}$$

$$2. \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}}$$

$$3. (e^{2x-1})^2 e^{3x+4}$$

$$4. \frac{e^{3x}}{e^{-x} (e^{-3x})^2}$$

$$5. e^{-2x} - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}$$

Exercice 6 : Montrer que:

1. pour tout réel x :

$$(a) \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

$$(b) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$2. \forall x \neq 0, \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Exercice 7 Pour tout réel x , on considère la fonction :

$$f(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{2} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{2}.$$

Montrer que f est constante sur \mathbb{R} .