Trigonométrie

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Définition et formulaire

1.1 Définition des fonctions trigonométriques

Définition 1 *Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. On note* $\mathcal{C}$ *le cercle de centre* O *et de rayon* 1 *(***cercle trigonométrique***).*
Pour tout réel θ*, le point* $M(\theta)$ *de* $\mathcal{C}$ *tel que l'angle orienté* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM(\theta)})$ *ait pour mesure* θ*, a pour coordonnées* $(\cos\theta, \sin\theta)$*.*
On définit ainsi sur $\mathbb{R}$ *deux fonctions* **sinus** *et* **cosinus***.*
La **tangente** *de* θ*, notée* $\tan\theta$*, est l'ordonnée du point d'intersection de* (OM) *avec la tangente au cercle passant par* A *(la perpendiculaire à* (OA) *passant par* A*).*

Quand la tangente de θ *est bien définie, le théorème de Thalès montre que*

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Remarque 1 Si (OM) est perpendiculaire à (OA), la tangente de θ n'est pas définie. Cela arrive si, et seulement si, θ est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec k un entier relatif.

Remarque 2 : valeurs usuelles:

Remarque 3 :
Le théorème de Thalès permet de déduire, de la définition du cosinus, du sinus et de la tangente que dans un triangle rectangle, on a les formules :

1.2 Symétries et propriétés

1.2.1 La formule fondamentale

Par définition, si θ est un angle quelconque, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont l'abscisse et l'ordonnée d'un point sur le cercle trigonométrique. Par le théorème de Pythagore, on a donc :

$$\forall\theta \in \mathbb{R} : \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

1.2.2 Formules de symétrie

Sur le cercle trigonométrique, comparez les points:

1. $M(\theta)$ et $M(\theta + 2\pi)$
2. $M(\theta)$ et $M(-\theta)$
3. $M(\theta)$ et $M(\pi - \theta)$
4. $M(\theta)$ et $M(\pi + \theta)$
5. $M(\theta)$ et $M(\frac{\pi}{2} - \theta)$

En déduire, dans chaque cas, les propriétés vérifiées par les fonctions sinus et cosinus.

***Proposition 1* (propriétés de la tangente):** *Si* $\cos\theta \neq 0$,
(1) La fonction tangente est **impaire***:* $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$.
(2) La fonction tangente est π**-périodique***:* $\tan(\theta+\pi) = \tan(\theta)$.
(3) $\tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta)$.
(4) Si de plus $\sin\theta \neq 0$, $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan\theta} = \cot(\theta)$.

Preuve:

■

1.3 Formules trigonométriques

On admet que: $\boxed{\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b}$
A partir de cette formule, on obtient:

***Proposition 2* :**
(1) $\cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$
(2) $\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \cos a\,\sin b$
(3) $\sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \cos a\,\sin b$

Preuve:
(1) *Le cosinus est paire et le sinus impaire...*

(2) Pour se ramener à la formule précédente, on utilise:
$\sin(a+b) = \cos(\ldots\ldots\ldots) = \ldots$

(3)

■

Remarque 4 En particulier pour :
$*$ $a = b$:

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a \text{ et } \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\,.$$

$*$ $b = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos a \text{ et } \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin a\,.$$

Donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \ldots$

***Proposition 3* (formules non exigibles) :**
(1) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\,\tan b}$.
(2) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\,\tan b}$.

Preuve:
(1) Par définition:
$\tan(a+b) = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \dots$

(2) *La tangente est impaire...*

■

Remarque 5 En particulier ($a = b$): $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$ (formule non exigible)

Remarque 6 Peut-on utiliser la formule de $\tan(a+b)$ pour retrouver celle de $\tan\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right)$?

***Proposition 4* :** $1 + \tan^2 a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$.

Preuve:

■

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : employer des formules pour résoudre des équations ou des problèmes faisant intervenir la trigonométrie.
Ces formules sont donc à connaître: pensez à faire un FORMULAIRE!

2 Équations trigonométriques

2.1 Équation $\cos x = c$

Remarque 7 Y a-t-il des valeurs de c pour lesquelles cette équation n'admet pas de solutions?

Première étape: résolution de $\cos x = \cos a$, où $a \in \mathbb{R}$:

Cette équation a pour solution évidente: $x = \dots$
Or la fonction cosinus est paire, donc une autre solution est $x = \dots$
Or la fonction cosinus est 2π-périodique, donc :

$$\cos x = \cos a \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z}\,,\ x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, l \in \mathbb{Z}\,,\ x = -a + 2l\pi \end{array} \right.$$

A-t-on bien raisonné par équivalence précédemment?

Exemple 1 : *n'hésitez pas à vous aider du cercle trigonométrique!*
(1) La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Résoudre $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 8 L'équation précédente a donc une infinité de solutions. Comment faire pour se ramener, par exemple, à une solution unique (sans changer l'équation)?
Quand θ varie entre 0 et π, $\cos\theta$ prend toute valeur comprise entre -1 et 1 une unique fois :

$$\forall c \in [-1, 1], \exists!\, \theta \in [0, \pi] : \cos\theta = c.$$

***Théorème 1* (admis):** *Soit $c \in [-1, 1]$.*
L'équation $\cos x = c$, d'inconnue réelle x, possède une unique solution x_0 dans $[0, \pi]$.
Le nombre $x_0 \in [0, \pi]$ s'appelle **l'arc cosinus** *de c, et est noté $\arccos c$. Sur la calculatrice, on l'obtient à l'aide de la touche* $\boxed{\cos^{-1}}$

Remarque 9 : ce théorème est-il bien compris?
$*$ Pour tous réels $x \in [-1, 1]$, que vaut $\cos(\arccos x)$?
$*$ $\forall c \in [-1, 1]$, $\forall x \in [0, \pi]$, $\cos x = c \iff x = \dots$

Exemple 2 Résoudre dans $[0, \pi]$: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque 10 : valeurs particulières de l'arc cosinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$					

2.2 Équation $\sin x = c$

Procédez, dans un premier temps, comme dans la partie précédente pour aboutir au résultat:

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}\,,\ x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, l \in \mathbb{Z}\,,\ x = \pi - a + 2l\pi \end{cases}$$

Remarque 11 Quand θ varie entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, $\sin\theta$ prend toute valeur comprise entre -1 et 1 une unique fois :

$$\forall s \in [-1,1], \exists!\, \theta \in [-\pi/2, \pi/2] : \sin\theta = s.$$

***Théorème 2* (admis):** *Soit $c \in [-1,1]$.*
L'équation $\sin x = c$, d'inconnue réelle x, possède une unique solution x_0 dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Le nombre $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ s'appelle **l'arc sinus** *de c, et est noté $\arcsin c$. Sur la calculatrice, on l'obtient à l'aide de la touche* $\boxed{\sin^{-1}}$

Remarque 12 : ce théorème est-il bien compris?
$*$ Pour tous réels $x \in [-1,1]$, que vaut $\sin(\arcsin x)$?
$*$ $\forall c \in [-1,1]$, $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = c \iff x = \ldots$

Exemple 3 Résoudre dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque 13 : valeurs particulières de l'arc sinus.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$					

2.3 Équation $\tan x = c$

Première étape: résolution de $\tan x = \tan a$, où $a \in \mathbb{R}$:

Remarque 14 Y a-t-il des conditions sur a?

En raisonnant comme précédemment, on aboutit au résultat:

$$\tan x = \tan a \iff \exists k \in \mathbb{Z}\,,\ x = a + k\pi\,.$$

Remarque 15 Quand θ varie entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (bornes exclues), $\tan\theta$ prend tout valeur réelle une unique fois :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists!\, \theta \in]-\pi/2, \pi/2[: \tan\theta = t.$$

***Théorème 3* (admis):** *Soit $c \in \mathbb{R}$.*
L'équation $\tan x = c$, d'inconnue réelle x, possède une unique solution x_0 dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Le nombre $x_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ s'appelle **l'arc tangente** *de c, et est noté $\arctan c$. Sur la calculatrice, on l'obtient à l'aide de la touche* $\boxed{\tan^{-1}}$

Remarque 16 : ce théorème est-il bien compris?
$*$ Pour tous réels $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\tan(\arctan x)$?
$*$ $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = c \iff x = \ldots$

Exemple 4 Résoudre dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $\tan x = 1$ et $\tan x = -\sqrt{3}$.

Remarque 17 : valeurs particulières de l'arc tangente.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$				