

Trigonométrie – Manipulation du cercle

I. Formules trigonométriques ET LE CERCLE !!

Exercice 1 Donner les valeurs de

$$1. \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad 2. \sin\left(\frac{17\pi}{4}\right) \quad 3. \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad 4. \cos(7\pi) \quad 5. \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

Exercice 2 Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \cos^2\left(-\frac{\pi}{13}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{13}\right) & 4. \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ 2. \cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) & 5. \cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ 3. \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(-\pi). & 6. \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \end{array}$$

Exercice 3 Simplifier l'expression : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, donner un réel x vérifiant les conditions demandées:

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, avec :

(a) $x \in [0, \pi[$.

(b) $x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}]$

2. $\sin x = \frac{1}{2}$, avec :

(a) $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

(b) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 5 Donner le signe de :

1. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

2. $\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

3. $\tan\left(\frac{13\pi}{5}\right)$

II. Équations/inéquations trigonométriques.

Exercice 6 Résoudre dans $[0, 2\pi]$ puis dans $[-\pi, \pi]$ les équations suivantes :

$$1. \cos x = \frac{1}{2} \quad 2. \cos x = \frac{1}{4} \quad 3. \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 4. \cos^2 x = \frac{1}{2} \quad 5. |\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 7 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\cos(3x) = \cos(x)$

2. $\cos(3x) = \sin x$

3. $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

4. $\tan(3x) = \tan x$

Exercice 8 Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans \mathbb{R} .

1. $\cos^2(x) - \frac{3}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} = 0$

3. $\cos(2x) = -2 \cos(x) - 1$

5. $2 \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

2. $\sin^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$

4. $\tan^2(x) + 5 \tan(x) = 0$

6. $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Exercice 9 Résoudre sur $[0, 2\pi[$ les inéquations trigonométriques suivantes:

1. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $1 - 3 \sin x \leq 0$

5. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{1}{2}$

7. $2|\cos x| < 1$

2. $\sin(2x) < 0$

4. $1 - 5 \cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$

6. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 < 0$

8. $\sin^2 x \leq \frac{3}{4}$

Exercice 10 Soient deux réels $x, y \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

1. Montrer que $\tan(x + 2y) = -1$.

on pourra utiliser la formule $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

2. En déduire la valeur de $x + 2y$.

Exercice 11 Le but de cet exercice est de calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $t^2 + 2\sqrt{3}t - 1 = 0$.

2. En utilisant la formule $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ pour un réel x judicieusement choisi, montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est solution de l'équation de la question précédente.

3. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

III. Trigonométrie réciproque.

Exercice 12 Déterminer les valeurs de

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

5. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

4. $\arctan(1)$

6. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice 13 Calculer les valeurs suivantes :

1. $\sin(\arcsin(\pi))$

2. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

3. $\tan(\arctan(3\pi))$

4. $\tan\left(\arctan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 14 Calculer les valeurs suivantes :

1. $\sin(\arcsin(2))$

2. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\pi}{17}\right)\right)$

3. $\tan(\arctan(3))$

4. $\tan\left(\arctan\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$

Exercice 15 Le but de cet exercice est de simplifier les expressions:

$\sin(\arccos x) \forall x \in [-1, 1]$ $\tan(\arcsin x) \forall x \in]-1, 1[$ et $\cos(\arctan x) \forall x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que : $\forall t \in [0, \pi], \sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$.

(b) En déduire que : $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

2. (a) En utilisant le même procédé que la question 1., montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

(b) $\tan(\arcsin x)$ est-il bien défini pour $x \in \{-1, 1\}$?

(c) En déduire que : $\forall x \in]-1, 1[, \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

3. (a) Montrer que : $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 t}}$. *indication: on rappelle la formule $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$*

(b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Exercice 16 Simplifier les expressions suivantes, en prenant le soin au préalable de préciser dans quel ensemble appartient x (on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent):

1. $\cos(2 \arccos x)$ et $\cos(2 \arctan x)$

2. $\sin^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$ et $\sin(2 \arctan x)$.