Trigonométrie – Manipulation du cercle

I. Formules trigonométriques ET LE CERCLE !!

Exercice 1 Donner les valeurs de

1. $\cos(\frac{5\pi}{6})$
2. $\sin(\frac{17\pi}{4})$
3. $\tan(\frac{2\pi}{3})$
4. $\cos(7\pi)$
5. $\sin(\frac{5\pi}{4})$

Exercice 2 Calculer les expressions suivantes :

1. $\cos^2\left(-\frac{\pi}{13}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{13}\right)$
2. $\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
3. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(-\pi)$.
4. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$
5. $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
6. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Exercice 3 Simplifier l'expression : $\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, donner un réel x vérifiant les conditions demandées:

1. $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, avec :
   (a) $x\in[0,\pi[$.
   (b) $x\in\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$
2. $\sin x=\frac{1}{2}$, avec :
   (a) $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$
   (b) $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 5 Donner le signe de :

1. $\cos(\frac{2\pi}{5})$
2. $\sin(\frac{8\pi}{5})$
3. $\tan(\frac{13\,\pi}{5})$

II. Équations/inéquations trigonométriques.

Exercice 6 Résoudre dans $[0,2\pi]$ puis dans $[-\pi,\pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x=\frac{1}{2}$
2. $\cos x=\frac{1}{4}$
3. $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos^2 x=\frac{1}{2}$
5. $|\tan x|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(3x)=\cos(x)$
2. $\cos(3x)=\sin x$
3. $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$
4. $\tan(3x)=\tan x$

Exercice 8 Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x)-\frac{3}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}=0$
2. $\sin^2 x+3\cos x-1=0$
3. $\cos(2x)=-2\cos(x)-1$
4. $\tan^2(x)+5\tan(x)=0$
5. $2\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$
6. $\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})=\cos^2(x+\frac{\pi}{3})$

Exercice 9 Résoudre sur $[0,2\pi[$ les inéquations trigonométriques suivantes:

1. $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(2x)<0$
3. $1-3\sin x\leqslant 0$
4. $1-5\cos\left(\frac{x}{2}\right)>0$
5. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$
6. $2\sin^2 x-3\sin x+1<0$
7. $2|\cos x|<1$
8. $\sin^2 x\leqslant\frac{3}{4}$

Exercice 10 Soient deux réels $x, y \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

1. Montrer que $\tan(x + 2y) = -1$.
   on pourra utiliser la formule $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \, \tan b}$
2. En déduire la valeur de $x + 2y$.

Exercice 11 Le but de cet exercice est de calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t^2 + 2\sqrt{3}\,t - 1 = 0$.
2. En utilisant la formule $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ pour un réel x judicieusement choisi, montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est solution de l'équation de la question précédente.
3. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

III. Trigonométrie réciproque.

Exercice 12 Déterminer les valeurs de

1. $\arcsin(\frac{1}{2})$
2. $\dfrac{\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})}$
3. $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})$
4. $\arctan(1)$
5. $\arcsin(-\frac{1}{2})$
6. $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

Exercice 13 Calculer les valeurs suivantes :

1. $\sin(\arcsin(\pi))$
2. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\tan(\arctan(3\pi))$
4. $\tan\left(\arctan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 14 Calculer les valeurs suivantes :

1. $\sin(\arcsin(2))$
2. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\pi}{17}\right)\right)$
3. $\tan(\arctan(3))$
4. $\tan\left(\arctan\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right)$

Exercice 15 Le but de cet exercice est de simplifier les expressions:
$\sin(\arccos x)$ $\forall x \in [-1, 1]$ $\tan(\arcsin x)$ $\forall x \in]-1, 1[$ et $\cos(\arctan x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que : $\forall t \in [0, \pi]$, $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$.
   (b) En déduire que : $\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}}$
2. (a) En utilisant le même procédé que la question 1., montrer que : $\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}}$
   (b) $\tan(\arcsin x)$ est-il bien défini pour $x \in \{-1, 1\}$?
   (c) En déduire que : $\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ \tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}$
3. (a) Montrer que : $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 t}}$. *indication: on rappelle la formule* $1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$
   (b) En déduire que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$

Exercice 16 Simplifier les expressions suivantes, en prenant le soin au préalable de préciser dans quel ensemble appartient x (on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent):

1. $\cos(2 \arccos x)$ et $\cos(2 \arctan x)$
2. $\sin^2(\frac{\arccos x}{2})$ et $\sin(2 \arctan x)$.