

Coefficients binomiaux

I. Manipulation des coefficients binomiaux

Exercice 1 Calculer : $\binom{8}{3}$ et $4 \times \binom{7}{4}$.

Exercice 2 Soient $k, n \in \mathbb{N}$, tels que $k < n$. Calculer : $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{N}^* : $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$

Exercice 4 Soient deux entiers p et n tels que : $2 \leq p \leq n - 2$. Montrer que :

$$\binom{n-2}{p} + 2 \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n}{p}$$

II. Manipulation du binôme de Newton

Exercice 5 Développer :

1. $(1 + \sqrt{5})^4$

2. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^5$

Exercice 6 Calculer les sommes suivantes: (x étant un réel)

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^n$

4. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

7. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k+1}$

2. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k$

5. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1}$

3. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$

6. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes:

1. $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$

2. $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Exercice 8 Calculer les sommes suivantes:

1. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1}$

2. $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k}$

3. $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$

Exercice 9 Calculer les sommes doubles suivantes:

1. $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \binom{n}{j}$.

2. $\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$.

III. Calcul de sommes

Exercice 10 On rappelle la formule du chef : $\forall n \geq 1, \forall p \in [1, n]$,

$$(*) \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

Les trois questions suivantes utilisent la formule du chef.

1. Établir: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

2. En remarquant que $k^2 = k(k-1) + k$, calculer:

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}, \forall n \geq 2.$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, calculer : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 11 Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$.

1. Montrer que pour tout $i \in [0, p]$,

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = \binom{p}{i} \binom{n}{p}$$

2. En déduire:

$$\sum_{i=0}^p \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = 2^p \binom{n}{p}$$

Exercice 12 :

1. On se propose de calculer la somme: $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$.

(a) Montrer que: $\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{k+p}{p}$.

(b) Soient deux entiers k, p . Justifier que: $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$.

(c) En déduire la valeur de $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$.

2. **Application:** en déduire, pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, la somme : $\sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^p (i+j) \right)$