

Coefficients binomiaux

I. Manipulation des coefficients binomiaux

Exercice 1 Calculer : $\binom{8}{3}$ et $4 \times \binom{7}{4}$.

Exercice 2 Soient $k, n \in \mathbb{N}$, tels que $k < n$. Calculer : $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

Exercice 3 Résoudre dans \mathbb{N}^* : $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$

Exercice 4 Soient deux entiers p et n tels que : $2 \leq p \leq n - 2$. Montrer que :

$$\binom{n-2}{p} + 2 \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n}{p}$$

II. Manipulation du binôme de Newton

Exercice 5 Développer :

$$1. (1 + \sqrt{5})^4 \qquad 2. (\sqrt{2} + \sqrt{3})^5$$

Exercice 6 Calculer les sommes suivantes: (x étant un réel)

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^n & 4. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k & 7. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k+1} \\ 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k & 5. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} & \\ 3. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k & 6. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} & \end{array}$$

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes:

$$1. \sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k} \qquad 2. \sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times (\sqrt{3})^{2n-k+1}$$

Exercice 8 Calculer les sommes suivantes:

$$1. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \qquad 2. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k} \qquad 3. \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$$

Exercice 9 Calculer les sommes doubles suivantes:

$$1. \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i} \binom{n}{j}. \qquad 2. \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j}.$$

III. Calcul de sommes

Exercice 10 On rappelle la formule du chef : $\forall n \geq 1, \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(*) \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

Les trois questions suivantes utilisent la formule du chef.

1. Établir: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$

2. En remarquant que $k^2 = k(k-1) + k$, calculer:

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}, \forall n \geq 2.$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, calculer : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 11 Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$.

1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$,

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = \binom{p}{i} \binom{n}{p}$$

2. En déduire:

$$\sum_{i=0}^p \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = 2^p \binom{n}{p}$$

Exercice 12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercice 13 : On se propose de calculer la somme: $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$ par une méthode télescopique.

1. Montrer que: $\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n-p} \binom{k+p}{p}$.

2. Soient deux entiers k, p . Justifier que: $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$.

Exercice 14 : On se propose de montrer par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$
on n'utilisera pas l'exercice précédent !