Coefficients binomiaux

I. Manipulation des coefficients binomiaux

Exercice 1 Calculer : $\binom{8}{3}$ et $4 \times \binom{7}{4}$.

Exercice 2 Soient $k, n \in \mathbb{N}$, tels que $k < n$. Calculer : $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{N}^*$: $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$

Exercice 4 Soient deux entiers p et n tels que : $2 \leqslant p \leqslant n-2$. Montrer que :

$$\binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n}{p}$$

II. Manipulation du binôme de Newton

Exercice 5 Développer :

1. $\left(1+\sqrt{5}\right)^4$
2. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^5$

Exercice 6 Calculer les sommes suivantes: (x étant un réel)

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^n$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k+1}$

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Exercice 8 Calculer les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} 3^k\, 2^{-k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$

III.Calcul de sommes

Exercice 9 On rappelle la formule du chef : $\forall n \geq 1$, $\forall p \in [|1, n|]$,

$$(*) \qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}.$$

Les trois questions suivantes utilisent la formule du chef.

1. Établir: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

2. En remarquant que $k^2 = k\,(k-1) + k$, calculer:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}, \ \forall n \geqslant 2\,.$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 10 Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geqslant p$.

1. Montrer que pour tout $i \in [|0, p|]$,

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} = \binom{p}{i}\binom{n}{p}$$

2. En déduire:

$$\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i} = 2^p \binom{n}{p}$$

Exercice 11 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

Exercice 12 :

1. On se propose de calculer de deux façons différentes la somme: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$.

   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

   (b) i. Montrer que: $\forall n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n-p}\binom{k+p}{p}$.

   ii. Soient deux entiers k, p. Justifier que: $\displaystyle\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$.

   iii. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$.

2. **Application:** en déduire, pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, la somme : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)$