# Coefficients binomiaux

BCPST 1C – Mme MOREL

## 1 Définition et premières propriétés

### 1.1 Définition

Soient deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Le coefficient binômial $\binom{n}{p}$, qui se lit "$p$ parmi $n$" est défini par:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \text{ ou } p > n \\ \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} & \text{sinon} \end{cases}}$$

**Remarque 1 :**

(1) On peut aussi trouver la notation $\mathrm{C}_n^p$.

(2) Ecriture avec factorielles: $\forall 0 \leqslant p \leqslant n$, $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}}$

En effet:

(3) Le nombre entier (voir la preuve dans la partie 2.1) $\binom{n}{p}$ a une interprétation en dénombrement: c'est le nombre de façons de choisir **simultanément** $p$ éléments parmi $n$.

### 1.2 Propriétés

***Proposition 1* :**

*(1)* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}}$ *(2)* $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \binom{n}{2} = \dfrac{n\,(n-1)}{2}}$

**Preuve:**

■

***Proposition 2*** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall 0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

**Preuve:**

■

***Proposition 3*** *Pour tout entier* $p, n \in \mathbb{N}$ *tels que* $1 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

**Preuve:**

■

# 2 Formule du binôme de Newton

## 2.1 Triangle de Pascal

***Proposition 4*** **(formule de Pascal):**
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall 0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

**Preuve:**
$\forall\, 0 \leqslant p \leqslant n-1$ $(p+1 \leqslant n)$:

Si $p = n$:

■

**Remarque 2 : Illustration du triangle de Pascal.**

***Proposition 5*** *Les coefficients binomiaux sont des nombres entiers.*

**Preuve:**

$*$ Si $p < 0$ ou $p > n$:

$*$ Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: "$\forall 0 \leqslant p \leqslant n\,,\ \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$".
$n = 0$:

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall 0 \leqslant p \leqslant n\,,\ \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.
Au rang $n+1$: montrons que $\forall 0 \leqslant p \leqslant n+1\,,\ \binom{n+1}{p} \in \mathbb{N}$.

■

## 2.2 Binôme de Newton

***Théorème 1* Binôme de Newton:**

$\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k\, a^{n-k}}$

**Remarque 3 :** Il s'agit d'une généralisation des égalités remarquables:
$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$.

**CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : utilisation du triangle de Pascal pour la formule du binôme.**

**Exemple 1** $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ et } (a-b)^3 = a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3}$

**CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : choix judicieux de la puissance:**
**Premier cas:** Il vaut mieux faire porter la puissance $n-k$ au réel le plus " facile " , c'est-à-dire:

- si $a = 1$ et $b = 5$, alors qui porte la puissance $n-k$? et pourquoi?

A retenir: $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ (a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ldots\ldots}$

- si $a = \ln 2$ et $b = -1$, alors qui porte la puissance $n-k$? et pourquoi?

A retenir: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (a-1)^n = \ldots\ldots \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ldots\ldots}$

**Deuxième cas:** Lorsque l'un a toutes ses puissances nulles à partir d'un certain ordre, il vaut mieux lui faire porter la puissance $k$.
*(cf le TD sur les puissances de matrices et le chapitre sur les dérivées successives)*

**POINT METHODE 1 : Appliquer la formule du binôme.**

**Exercice 1 (choisir judicieusement deux réels $a$ et $b$)** Montrer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

**Exercice 2 (se ramener à la formule en "ciblant" les problèmes un par un)**
Pour tout entier $n \geqslant 1$, et tout réel non nul $x$, calculer la somme: $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$.