

Coefficients binomiaux

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Définition et premières propriétés

1.1 Définition

Soient deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$, qui se lit “ p parmi n ” est défini par:

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \text{ ou } p > n \\ \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1 :

(1) On peut aussi trouver la notation C_n^p .

(2) Ecriture avec factorielles: $\forall 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

En effet:

(3) Le nombre entier (voir la preuve dans la partie 2.1) $\binom{n}{p}$ a une interprétation en dénombrement: c'est le nombre de façons de choisir **simultanément** p éléments parmi n .

1.2 Propriétés

Proposition 1 :

$$(1) \forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \quad (2) \forall n \geq 2, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Preuve:

Proposition 2 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Preuve:

Proposition 3 Pour tout entier $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1}$.

Preuve:

■

2 Formule du binôme de Newton

2.1 Triangle de Pascal

Proposition 4 (formule de Pascal):

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Preuve:

$$\forall 0 \leq p \leq n-1 \ (p+1 \leq n):$$

Si $p = n$:

■

Remarque 2 : Illustration du triangle de Pascal.

Proposition 5 Les coefficients binomiaux sont des nombres entiers.

Preuve:

* Si $p < 0$ ou $p > n$:

* Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété \mathcal{P}_n : " $\forall 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ ".
 $n = 0$:

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Au rang $n + 1$: montrons que $\forall 0 \leq p \leq n + 1, \binom{n + 1}{p} \in \mathbb{N}$.

2.2 Binôme de Newton

Théorème 1 Binôme de Newton:

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

Remarque 3 : Il s'agit d'une généralisation des égalités remarquables:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ et } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : utilisation du triangle de Pascal pour la formule du binôme.

Exemple 1 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a - b)^3 = a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3$

CAPACITÉ EXIGIBLE 2 : choix judicieux de la puissance:

Premier cas: Il vaut mieux faire porter la puissance $n - k$ au réel le plus " facile ", c'est-à-dire:

- si $a = 1$ et $b = 5$, alors qui porte la puissance $n - k$? et pourquoi?

A retenir: $\forall a \in \mathbb{R}, (a + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \dots\dots$

- si $a = \ln 2$ et $b = -1$, alors qui porte la puissance $n - k$? et pourquoi?

A retenir: $\forall n \in \mathbb{N}, (a - 1)^n = \dots\dots \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \dots\dots$

Deuxième cas: Lorsque l'un a toutes ses puissances nulles à partir d'un certain ordre, il vaut mieux lui faire porter la puissance k .

(cf le TD sur les puissances de matrices et le chapitre sur les dérivées successives)

POINT METHODE 1 : Appliquer la formule du binôme.

Exercice 1 (choisir judicieusement deux réels a et b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Exercice 2 (se ramener à la formule en "ciblant" les problèmes un par un)

Pour tout entier $n \geq 1$, et tout réel non nul x , calculer la somme: $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{k-1}$.