Nombres complexes

BCPST 1C – Mme MOREL

Pour déterminer toutes les solutions d'une équation polynômiale, il a fallu introduire de "nouveaux" nombres.
En effet, par exemple, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions réelles si $a < 0$.
Ainsi, on nomme i un nombre tel que $i^2 = -1$, puis on construit rigoureusement l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ (contenant $\mathbb{R}$).
L'équation $x^2 = a$ pour $a < 0$ aura alors des solutions complexes.

1 Forme algébrique

1.1 Présentation

Définition 1 *L'ensemble des* **nombres complexes** *est l'ensemble* $\boxed{\mathbb{C} = \{a + ib/a, b \in \mathbb{R}\}}$ *où* $i^2 = -1$, *muni d'une addition (notée +) et d'une multiplication (notée ×) qui vérifient les règles usuelles de l'addition et de la multiplication dans* $\mathbb{R}$, *soit:*

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$.
- $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

***Définition 2* :**

(1) Soit $z \in \mathbb{C}$. *L'écriture* $z = a + ib$, *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ *est la* **forme algébrique** *de* z.
(2) Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$,
a *est appelé* **partie réelle** *de* z, *notée* $\boxed{a = Re(z)}$
b *est appelé* **partie imaginaire** *de* z, *notée* $\boxed{b = Im(z)}$

Remarque 1 La forme algébrique est unique, i.e. deux complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. En d'autres termes: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{a + ib = c + id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}}$$

Remarque 2 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$.
Les nombres complexes de la forme $a + i0$ sont donc naturellement identifiés à $\mathbb{R}$.

Définition 3 *Les nombres complexes* z *tels que* $Re(z) = 0$ *(de la forme* ib, $b \in \mathbb{R}$*) sont appelés les* **imaginaires purs**.
Leur ensemble est noté $\boxed{i\mathbb{R}}$

Théorème 1 *Muni des opérations + et ×,* $\mathbb{C}$ *satisfait les propriétés suivantes :*

1. **Associativité de l'addition :**
$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z + (z' + z'') = (z + z') + z''.$$
2. $0 = 0 + 0i$ **est élément neutre pour l'addition :**
$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z.$$
3. **Existence d'un opposé pour l'addition :**
$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C}, z + w = w + z = 0.$$
4. **Commutativité de l'addition :**
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, z + w = w + z.$$
5. **Associativité du produit :**
$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'').$$
6. $1 = 1 + 0i$ **est élément neutre pour le produit :**
$$\forall z \in \mathbb{C}, 1 \times z = z \times 1 = z.$$

7. **Commutativité du produit :**
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, zw = wz.$$

8. **Distributivité de $\times$ sur $+$:**
$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}\,,\; z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

9. **Existence d'un inverse pour $\times$, pour tout élément non nul :**
$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists w \in \mathbb{C}\,,\; zw = wz = 1.$$

Preuve:

$\blacksquare$

Proposition 1 *$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*
(1) $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ et $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$.
(2) $Re(\lambda\, z_1) = \lambda\, Re(z_1)$ et $Im(\lambda\, z_1) = \lambda\, Im(z_1)$.

Preuve:

$\blacksquare$

Remarque 3 On en déduit: pour tous complexes $z_1, \ldots, z_k$,

$$Re\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Re(z_k) \text{ et } Im\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Im(z_k)\,.$$

Définition 4 **(représentation géométrique):**
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) Soit M un point du plan de coordonnées (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$.
On dit que le complexe $z = a + ib$ est **l'affixe** *du point M, et on note $M(z)$.*
L'axe des abscisses (O_x) est **l'axe des réels** *et l'axe des ordonnées (O_y) est* **l'axe des imaginaires purs**.
(2) Le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ donc z est aussi **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$

Remarque 4 : ATTENTION! $\boxed{\text{Pas de relation d'ordre } (\leqslant) \text{ dans } \mathbb{C}!!!}$

Remarque 5 Interprétation géométrique de la somme de deux complexes.
Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes z et z' respectivement. Le point N d'affixe $z + z'$ donne la relation vectorielle: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.
Donc le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme et:

la somme de deux complexes z et z' est représentée par la diagonale principale du parallélogramme $OMNM'$.

De même, la différence $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$:

la différence de deux complexes z et z' est représentée par la diagonale secondaire du parallélogramme $OMNM'$.

1.2 Complexe conjugué

Définition 5 *Pour tout complexe $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, on définit son* **conjugué**, *notée $\overline{z}$, par:*

$$\overline{z} = a - ib\,.$$

Donc $Re(\overline{z}) = Re(z)$ et $Im(\overline{z}) = -Im(z)$.

Remarque 6 : Représentation géométrique.

Soit $M(z)$ le point du plan d'affixe z, $M(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses (O_x).

Exemple 1 :

(1) $\overline{i} = \dots$

(2) On note le complexe $\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ alors $\overline{j} = \dots$

Remarquons que $j^2 =$ donc: $\boxed{j^2 = \overline{j}}$

Proposition 2 **(règles de calcul):** *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.*

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(2) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ (récurrence).

(3) Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\overline{z}^n}$ (récurrence).

Preuve:

■

Remarque 7 D'après (2) et (3): $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \overline{z^n} = \overline{z}^n \text{ (avec } z \neq 0 \text{ si } n < 0)}$

Proposition 3 *Soit $z \in \mathbb{C}$.*

(1) $\overline{\overline{z}} = z$.

(2) $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ donc $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

(3) $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$ donc $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

POINT METHODE 1 : Comment montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur?

1. En passant par le conjugué: calculer $\overline{z}$ et aboutir à z ou $-z$.

2. En passant par un argument (voir partie 2.1)

Preuve:

■

1.3 Module

Remarque 8 : représentation géométrique.

Soit $M(z)$ le point du plan d'affixe $z = a + ib$. z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
On rappelle que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (ou la distance entre O et M) est donnée par: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Cela définit le module de z...

Définition 6 *Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit son* **module***, noté $|z|$ par:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Remarque 9 :
(1) **Cohérence de la notation:** si $z = a + i0$ alors $\underbrace{|z|}_{\text{module}} = \sqrt{a^2} = \underbrace{|a|}_{\text{valeur absolue}}$.
Donc $\boxed{\text{le module d'un réel coïncide avec sa valeur absolue}}$, donc la notation du module est cohérente.
(2) On a aussi: $\boxed{|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}}$
En effet: $z\,\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Exemple 2 $|i| = \ldots$ et $|j| =$ donc $\boxed{|j| = 1}$

Remarque 10 :
(1) **ATTENTION!** $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant 0$!!
Le module étant une distance, c'est un **réel positif**. On peut donc comparer des modules (utiliser des encadrements) alors qu'on ne peut le faire pour des complexes (cf remarque 3).
(2) On a déjà vu que $|z|$ est la distance entre O et $M(z)$. Généralisation:
Soient deux points du plan A et B respectivement d'affixes $z_A = a + ib$ et $z_B = c + id$. On rappelle que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour norme (distance entre A et B) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.
Or $c - a = Re(z_B - z_A)$ et $d - b = Im(z_B - z_A)$ donc $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.

Conclusion: $\boxed{\text{le module } |z_B - z_A| \text{ est la distance entre deux points } A \text{ et } B}$

Exemple 3 :

(1) On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ l'ensemble des complexes de module 1.

C'est le <u>cercle unité</u> (de centre O et de rayon 1)!

(2) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in [0, +\infty[$.

Alors $D = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leqslant r\}$ est le disque de centre A d'affixe a et de rayon r:

***Proposition 4* :**

(1) $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \iff z = 0$ *et* $|\overline{z}| = |z|$.

(2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z^n| = |z|^n$ *(récurrence).*

(3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right|^n$

Preuve:

■

Remarque 11 D'après (2) et (3): $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z^n| = |z|^n \text{ (avec } z \neq 0 \text{ si } n < 0)}$

***Proposition 5* (inégalités triangulaires):** *Pour tous complexes* z_1, z_2*:*

(1) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

(2) $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

Preuve:

■

2 Forme trigonométrique

2.1 Argument d'un complexe non nul

Définition 7 **(représentation géométrique):** *le plan est rapporté à un repère orthonormal* **direct**.

Soit $M(z)$ un point du plan (autre que l'origine) d'affixe z.
Une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est noté $\boxed{\theta = \arg(z)}$ *et appelé* **argument de** z.

Remarque 12 :
(1) **ATTENTION!** Le complexe nul n'a pas d'argument puisque l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{O})$ n'est pas défini!
(2) Un point M du plan d'affixe z est déterminé par son module et un argument:
on parle de **coordonnées polaires**.

Proposition 6 *Tout complexe non nul z s'écrit de manière unique:*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

où:
- $r = |z| > 0$ *est le module de z,*
- $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$ *est défini à un multiple de 2π près.*

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** *du complexe z.*

Preuve:

$\blacksquare$

Remarque 13 : Récapitulation des points importants de la preuve.

(1) Unicité de l'écriture: en d'autres termes, $\forall r_1, r_2 > 0$, $\forall \theta_1\,,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z}\,,\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}}$$

(2) Lien entre la forme algébrique ($z = a + ib$) et la forme trigonométrique ($z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$ pour tout complexe z non nul:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos(\arg z) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\arg z) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Exemple 4 :

(1) $i = \ldots$

(2) On rappelle: $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $|j| = \ldots$ (déjà vu)

Donc: $\boxed{j = \cos(\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{2\pi}{3})}$

(3) $z = \sqrt{3} + i \neq 0$. $|z| = \ldots$

Remarque 14 :

(1) $z \in \mathbb{R} \iff z = 0$ ou $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg z = 0 + k\pi$.

(2) $z \in i\mathbb{R} \iff z = 0$ ou $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

POINT METHODE 2 La remarque précédente donne une autre méthode (voir celle passant par le conjugué) permettant de montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur.

Remarque 15 Soit $z \in \mathbb{C}^*$: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors:
$\overline{z} = r\cos\theta - ir\sin\theta = r\cos(-\theta) + ir\sin(-\theta)$ car le cosinus est pair et le sinus impair. Donc: $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.
Conclusion: cette écriture étant unique, $|\overline{z}| = r = |z|$ (on le savait déjà!) et $\boxed{\exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg(\overline{z}) = -\arg z + 2k\pi}$
On verra d'autres propriétés de l'argument dans la partie suivante (l'écriture exponentielle sera plus manipulable pour les preuves).

2.2 Écriture exponentielle

Notation 1 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque 16 $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

***Proposition 7* :**
$*$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$(1)\ |e^{i\theta}| = 1 \qquad (2)\ \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\, e^{i\beta}$. *Donc* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ *(récurrence).*

Preuve: (basée sur les formules trigonométriques)
(1) $|e^{i\theta}| = \dots$
(2) $\overline{e^{i\theta}} = \dots$
(3)

∎

Remarque 17 $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

Conclusion: $\boxed{\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\ \forall \theta \in \mathbb{R}}$

***Proposition 8* (formules d'Euler):** $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Preuve:

∎

***Proposition 9* (formule de Moivre):** $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Preuve:
$*$ Pour $n \in \mathbb{N}$, c'est l'écriture trigonométrique de $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.
$*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-in\theta} = \dots$

∎

Définition 8 *Si z est un complexe non nul de module r et d'argument θ, on peut écrire:*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}\,.$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle**.

Exemple 5 :
(1) $i = \ldots$, $j = \ldots$, $e^{2i\pi} = \ldots$, $e^{i\pi} = \ldots$
(2) $\sqrt{3} + i = \ldots$, $e^{2ik\pi} = \ldots$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 18 Avec cette écriture, on retrouve facilement que $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
En effet: si $z = re^{i\theta}$ alors $\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = \ldots$
Plus généralement:

Proposition 10 *$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$,*
(1) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\,(2\pi)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z)\,(2\pi)$ (récurrence).
(2) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)\,(2\pi)$ donc $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2\,(2\pi)$.

Preuve: On note $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.
(1) $z_1 z_2 = \ldots$
(2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \ldots$

■

Remarque 19 $\boxed{\text{Si } |z| = 1 \text{ alors } \overline{z} = \frac{1}{z}}$
En effet: ...

Exemple 6 On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ vérifie:

2.3 Exponentielle complexe

Définition 9 *Pour tout complexe $z = a + ib$, on définit* **l'exponentielle de** *z par:*

$$\boxed{e^z = e^a\, e^{ib} = e^a\,(\cos b + i\sin b)}$$

Proposition 11 *$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$.*

Preuve: Notons $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ alors:

$$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^a\, e^{ib}\, e^c\, e^{id} = (e^a e^c)\,(e^{ib}\, e^{id}) = e^{a+c} e^{i(b+d)}\,.$$

Or $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$ donc $e^{z_1+z_2} = e^{a+c}e^{i(b+d)}$. Ce qui achève la preuve.

■

3 Applications

3.1 Equations du second degré à coefficients réels

3.1.1 Racines carrées d'un réel strictement négatif

Rappel 1 L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solutions réelles si $a < 0$.
(Si $a \geqslant 0$, $x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.)

Proposition 12 *Si $a < 0$, on passe aux complexes: $z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$.*
Autrement dit:

$$\boxed{\textit{Les racines carrées d'un réel } a < 0 \textit{ sont } i\sqrt{-a} \textit{ et } -i\sqrt{-a}}$$

Preuve: (on rappelle que $a^2 + b^2 = (a + ib)\,(a - ib)$), donc :

■

3.1.2 Trinômes du second degré de discriminant $\Delta < 0$

Proposition 13 *$\forall z \in \mathbb{C}$, considérons $P(z) = a\,z^2 + bz + c$, avec $\underline{a \neq 0}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).*
Supposons $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors
* *P admet deux racines complexes conjuguées:*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad et \ z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

* *Factorisation de P dans $\mathbb{C}$:*

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Preuve:

■

3.1.3 Racines carrées d'un complexe

Soit un complexe a donné.
But: résoudre l'équation $z^2 = a$ dans $\mathbb{C}$. On distingue trois cas :

- **Si a est un réel positif :**
  $z^2 = a \iff z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$, donc $\boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}}$
- **Si a est réel strictement négatif :** voir la partie 3.1.1.
  $z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$ donc $\boxed{\mathcal{S} = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}}$
- **Si $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$: a est un complexe non nul, non réel.**
  Sous quelle forme chercher z ? Tout dépend de a: **peut-on écrire a sous forme exponentielle "facilement"?**
  - **SI OUI : on cherche z sous forme exponentielle.** Calculs à savoir refaire dans le cadre d'un exercice : il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = r\,e^{i\,\theta}$, donc :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff z^2 = \left(\sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\right)^2 \\ &\iff z^2 - \left(\sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\right)\left(z + \sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \\ &\iff z = \sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

  Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{r}\,e^{i\,\frac{\theta}{2}}\right\}}$

Exemple 7 Résoudre $z^2 = \sqrt{3} - i$.

– **Si NON : on cherche z sous forme algébrique.** Calculs (et raisonnement d'analyse-synthèse) à savoir refaire dans le cadre d'un exercice: il existe deux réels x et y tels que $z = x + i\,y$, donc

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff (x+i\,y)^2 = Re(a) + i\,Im(a) \\ &\iff (x^2-y^2) + i\,(2xy) = Re(a) + i\,Im(a) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 &=& Re(a) \\ 2xy &=& Im(a) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Astuce : penser au module ! $z^2 = a$ donc $|z|^2 = |a|$, soit : $x^2 + y^2 = |a|$, donc (équivalence perdue) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 &=& Re(a) \\ x^2 + y^2 &=& |a| \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 &=& Re(a) \\ 2\,x^2 &=& Re(a) + |a| \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right.$$

Donc on obtient x^2 donc deux valeurs pour x, puis y^2 donc deux valeurs pour y.
Conclusion : **Si z est solution, on obtient quatre valeurs possibles pour z.**
Réciproquement : penser au signe du produit. $x\,y = \dfrac{Im(a)}{2}$, donc le signe du produit nous dit si x et y sont de même signe ou de signe contraire, et i**l reste deux solutions à l'équation.**

Exemple 8 Résoudre $z^2 = 3 + 4\,i$.

3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux, avec $\Delta < 0$

Rappel 2 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre** 2 s'il existe deux réels a et b tels que:
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n}$

Rappel 3 On appelle **équation caractéristique** de cette suite l'équation du second degré:

$$x^2 = ax + b \iff x^2 - ax - b = 0\,.$$

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Exprimer u_n en fonction de n.

1. **Étape 1: résolution de l'équation caractéristique.** de discriminant Δ.
2. **Étape 2: Expression de u_n.** Tout dépend du signe de $\Delta\ldots$
   (a) Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, voir le chapitre Suites usuelles.

(b) **Si** $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées, z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$.
En écrivant ces racines sous forme trigonométrique: $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$, on a:

Proposition 14 **:** $\boxed{\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n\ (\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))}$

Remarque 20 Donner λ_1 et λ_2 en fonction de u_0 et u_1:

3.3 Équations trigonométriques de la forme $a\cos x + b\sin x = c$

Soient trois réels a, b, c. On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du type:

$$a\cos x + b\sin x = c$$

3.3.1 Transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $r\cos(\theta - \varphi)$

Supposons que r et φ existent:

$$\begin{aligned} & a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta-\varphi) \\ \iff\ & \cos(\theta-\varphi) = \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{b}{r}\sin(\theta) \text{ (ATTENTION! } \qquad\qquad\qquad) \\ \iff\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{formule trigonométrique}} = \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{b}{r}\sin(\theta) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre φ tel que: $\cos\varphi = \ldots\ldots$ et $\sin\varphi = \ldots\ldots$. Mais deux questions se posent:
* est-ce possible?
* qui prendre pour r?

Si z est un nombre complexe de module 1, alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\varphi}$.
En d'autres termes: si $z = u + iv \in \mathbb{C}$ tel que (donner une condition sur u et v pour que $|z| = 1$): ,
alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\varphi = \ldots\ldots$ et $\sin\varphi = \ldots\ldots$

Conclusion: dans notre cas, φ existe si: $r \neq 0$ et $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$. Et on récupère une équation sur r:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1 \iff \frac{a^2+b^2}{r^2} = 1 \iff \ldots$$

POINT METHODE 3 :

$$\text{Posons } \boxed{r = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Remarque 21 Si $a = 0$ et $b = 0$, on a clairement $a\cos\theta + b\sin\theta = 0 = r\cos(\theta - \varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$.

On suppose donc dans la suite que $\boxed{a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$
Alors $r \neq 0$ et $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \ldots\ldots$, donc:

$$\boxed{\text{il existe } \varphi \in \mathbb{R} \text{ (unique dans } [0, 2\pi[\text{) tel que } \cos\varphi = \frac{a}{r} \text{ et } \sin\varphi = \frac{b}{r}}$$

On obtient (**calculs à savoir refaire**):

$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\left(\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{b}{r}\sin\theta\right) = r\ (\cos\varphi\,\cos\theta + \sin\varphi\,\sin\theta) = r\ \cos(\theta - \varphi)\,.$$

Exemple 9 Transformer $\sqrt{3}\cos x - \sin x$.

3.3.2 Application à la résolution d'équations $a\cos x + b\sin x = c$

On suppose $\boxed{a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$

POINT METHODE 4 :

1. **étape 1: utiliser la transformation**
   Posant $r = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$, il vient:

   $$a\cos x + b\sin x = c \iff r\cos(x-\varphi) = c \iff \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

   Question: cette équation admet-elle toujours des solutions?

   Dans la suite, on suppose que $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$.

2. **étape 2: Homogénéiser l'équation**
   On transforme $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en $\cos\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) afin de se ramener à l'équation trigonométrique $\cos(x-\varphi) = \cos\alpha$.
   (on admet l'existence de α ...)
   On termine maintenant la résolution: $\cos(x-\varphi) = \cos\alpha \iff \ldots$

Exemple 10 Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}$.

3.4 Formules d'Euler et applications

Rappel 4 : Formules d'Euler.
$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

3.4.1 Technique de l'angle moyen

But: calcul des parties réelle et imaginaire d'un complexe exprimé sous forme de somme d'exponentielles.

***Proposition 15* (technique de l'angle moyen):** *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

(1) $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

(2) $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Preuve (à savoir refaire): basée sur les formules d'Euler

$\blacksquare$

POINT METHODE 5 : calcul des parties réelle et imaginaire.

Exemple 11 $z = \dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.
Pour quels réels θ, z est-il bien défini?

1. **Technique de l'angle moyen pour chaque somme ou différence d'exponentielles:**

2. **Exhiber les parties réelle et imaginaire:**

   Rappel 5 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$ et $Im(\lambda z) = \lambda Im(z)$, donc:

3.4.2 Technique de calcul de sommes et produits contenant des termes en cosinus et sinus

POINT METHODE 6 : se ramener à une somme géométrique en passant par l'écriture exponentielle.

Exemple 12 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos k$.

1. **Interpréter le cosinus (resp. sinus) comme la partie réelle (resp. imaginaire) d'un complexe:**

   Remarque 22 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos\theta = Re(e^{i\theta}) \text{ et } \sin\theta = Im(e^{i\theta})}$

$$\cos k = Re(e^{ik})$$

2. Utiliser la Proposition 1:
$$\sum_{k=0}^{n} \cos k = \sum_{k=0}^{n} Re(\ldots\ldots) = Re(\qquad\qquad)\,.$$

3. **Se ramener à une somme géométrique:**
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} (\ldots\ldots)^k \underset{??}{=} \ldots\,.$$

4. **Calculer la partie réelle (ou imaginaire) du résultat complexe obtenu:**
Dans cet exemple, on est ramenés à la technique de l'angle moyen. On obtient:

Conclusion:
$$\sum_{k=0}^{n} \cos k = Re(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}) = \frac{\cos(\frac{n}{2})\,\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}\,.$$

3.4.3 Technique de linéarisation

But: transformer une expression contenant des termes en $\cos^p x$ et $\sin^p x$ en termes de la forme $\cos(px)$ et $\sin(px)$.

POINT METHODE 7 : technique de linéarisation.

Exemple 13 Linéariser $\cos^4 x$.

1. **Utiliser les formules d'Euler:**
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,.$$

2. **Utiliser le binôme de Newton et penser à regrouper les termes:**
$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

3. **Utiliser à nouveau les formules d'Euler:**
$$\cos^4 x = \frac{1}{16}\,(6 + 2\cos(4x) + 8\cos(2x)) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\,.$$

3.5 Application de la formule de Moivre

Rappel 6 : Formule de Moivre.
$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

POINT METHODE 8 : technique d'antilinéarisation.

Exemple 14 Calculer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

1. **Utiliser le binôme de Newton pour développer** $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$**:**
$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \ldots$

2. **Utiliser la formule de Moivre pour développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$:**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\,.$$

3. **Égaler les parties réelle et imaginaire des deux expressions précédentes:**