

Nombres complexes

BCPST 1C – Mme MOREL

Pour déterminer toutes les solutions d'une équation polynomiale, il a fallu introduire de "nouveaux" nombres. En effet, par exemple, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions réelles si $a < 0$. Ainsi, on nomme i un nombre tel que $i^2 = -1$, puis on construit rigoureusement l'ensemble des complexes \mathbb{C} (contenant \mathbb{R}). L'équation $x^2 = a$ pour $a < 0$ aura alors des solutions complexes.

1 Forme algébrique

1.1 Présentation

Définition 1 L'ensemble des **nombres complexes** est l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ où $i^2 = -1$, muni d'une addition (notée $+$) et d'une multiplication (notée \times) qui vérifient les règles usuelles de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{R} , soit:

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$.
- $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Définition 2 :

(1) Soit $z \in \mathbb{C}$. L'écriture $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est la **forme algébrique** de z .

(2) Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

a est appelé **partie réelle** de z , notée $a = \text{Re}(z)$

b est appelé **partie imaginaire** de z , notée $b = \text{Im}(z)$

Remarque 1 La forme algébrique est unique, i.e. deux complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. En d'autres termes: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$a + ib = c + id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Remarque 2 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(z) = 0$.

Les nombres complexes de la forme $a + i0$ sont donc naturellement identifiés à \mathbb{R} .

Définition 3 Les nombres complexes z tels que $\text{Re}(z) = 0$ (de la forme ib , $b \in \mathbb{R}$) sont appelés les **imaginaires purs**.
Leur ensemble est noté $i\mathbb{R}$

Théorème 1 Muni des opérations $+$ et \times , \mathbb{C} satisfait les propriétés suivantes :

1. **Associativité de l'addition :**

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z + (z' + z'') = (z + z') + z''.$$

2. **$0 = 0 + 0i$ est élément neutre pour l'addition :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z.$$

3. **Existence d'un opposé pour l'addition :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C}, z + w = w + z = 0.$$

4. **Commutativité de l'addition :**

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, z + w = w + z.$$

5. **Associativité du produit :**

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'').$$

6. **$1 = 1 + 0i$ est élément neutre pour le produit :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, 1 \times z = z \times 1 = z.$$

7. Commutativité du produit :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, zw = wz.$$

8. Distributivité de \times sur $+$:

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

9. Existence d'un inverse pour \times , pour tout élément non nul :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists w \in \mathbb{C}, zw = wz = 1.$$

Preuve:

Proposition 1 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

- (1) $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ et $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$.
- (2) $Re(\lambda z_1) = \lambda Re(z_1)$ et $Im(\lambda z_1) = \lambda Im(z_1)$.

Preuve:

Remarque 3 On en déduit: pour tous complexes z_1, \dots, z_k ,

$$Re\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n Re(z_k) \text{ et } Im\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n Im(z_k).$$

Définition 4 (représentation géométrique):

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) Soit M un point du plan de coordonnées (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$.

On dit que le complexe $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M , et on note $M(z)$.

L'axe des abscisses (O_x) est l'**axe des réels** et l'axe des ordonnées (O_y) est l'**axe des imaginaires purs**.

(2) Le vecteur $\vec{OM} = a \vec{i} + b \vec{j}$ donc z est aussi l'**affixe du vecteur \vec{OM}**

Remarque 4 : ATTENTION! Pas de relation d'ordre (\leq) dans $\mathbb{C}!!!$

Remarque 5 Interprétation géométrique de la somme de deux complexes.

Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes z et z' respectivement. Le point N d'affixe $z + z'$ donne la relation vectorielle: $\vec{ON} = \vec{OM} + \vec{OM}'$.

Donc le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme et:

la somme de deux complexes z et z' est représentée par la diagonale principale du parallélogramme $OMNM'$.

De même, la différence $z' - z$ est l'affixe du vecteur \vec{MM}' :

la différence de deux complexes z et z' est représentée par la diagonale secondaire du parallélogramme $OMNM'$.

1.2 Complexe conjugué

Définition 5 Pour tout complexe $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), on définit son **conjugué**, notée \bar{z} , par:

$$\bar{z} = a - ib.$$

Donc $Re(\bar{z}) = Re(z)$ et $Im(\bar{z}) = -Im(z)$.

Remarque 6 : Représentation géométrique.

Soit $M(z)$ le point du plan d'affixe z , $M(\bar{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses (O_x).

Exemple 1 :

$$(1) \bar{i} = \dots$$

$$(2) \text{ On note le complexe } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ alors } \bar{j} = \dots$$

Remarquons que $j^2 =$ donc: $j^2 = \bar{j}$

Proposition 2 (règles de calcul): Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$(1) \bar{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}.$$

$$(2) \bar{z_1 z_2} = \bar{z_1} \bar{z_2} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \bar{z^n} = \bar{z}^n \text{ (récurrence).}$$

$$(3) \text{ Si } z_2 \neq 0, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^n} \text{ (récurrence).}$$

Preuve:

Remarque 7 D'après (2) et (3): $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \bar{z^n} = \bar{z}^n$ (avec $z \neq 0$ si $n < 0$)

Proposition 3 Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(1) \bar{\bar{z}} = z.$$

$$(2) Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ donc } z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}.$$

$$(3) Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} \text{ donc } z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

POINT METHODE 1 : Comment montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur?

1. En passant par le conjugué: calculer \bar{z} et aboutir à z ou $-\bar{z}$.

2. En passant par un argument (voir partie 2.1)

Preuve:

1.3 Module

Remarque 8 : représentation géométrique.

Soit $M(z)$ le point du plan d'affixe $z = a + ib$. z est aussi l'affixe du vecteur \vec{OM} .

On rappelle que la norme du vecteur \vec{OM} (ou la distance entre O et M) est donnée par: $\|\vec{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cela définit le module de z ...

Définition 6 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit son **module**, noté $|z|$ par:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque 9 :

(1) **Cohérence de la notation:** si $z = a + i0$ alors $\underbrace{|z|}_{\text{module}} = \sqrt{a^2} = \underbrace{|a|}_{\text{valeur absolue}}$.

Donc $\boxed{\text{le module d'un réel coïncide avec sa valeur absolue}}$, donc la notation du module est cohérente.

(2) On a aussi: $\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}}}$

En effet: $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Exemple 2 $|i| = \dots$ et $|j| =$

donc $\boxed{|j| = 1}$

Remarque 10 :

(1) **ATTENTION!** $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0!!$

Le module étant une distance, c'est un **réel positif**. On peut donc comparer des modules (utiliser des encadrements) alors qu'on ne peut le faire pour des complexes (cf remarque 3).

(2) On a déjà vu que $|z|$ est la distance entre O et $M(z)$. Généralisation:

Soient deux points du plan A et B respectivement d'affixes $z_A = a + ib$ et $z_B = c + id$. On rappelle que le vecteur \vec{AB} a pour norme (distance entre A et B) $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

Or $c - a = \operatorname{Re}(z_B - z_A)$ et $d - b = \operatorname{Im}(z_B - z_A)$ donc $\|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$.

Conclusion: le module $|z_B - z_A|$ est la distance entre deux points A et B

Exemple 3 :

(1) On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ l'ensemble des complexes de module 1.

C'est le **cercle unité** (de centre O et de rayon 1)!

(2) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in [0, +\infty[$.

Alors $D = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leq r\}$ est le disque de centre A d'affixe a et de rayon r :

Proposition 4 :

(1) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0$ et $|\bar{z}| = |z|$.

(2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z^n| = |z|^n$ (récurrence).

(3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{1}{z^n} \right| = \left| \frac{1}{z} \right|^n$

Preuve:

Remarque 11 D'après (2) et (3): $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, |z^n| = |z|^n$ (avec $z \neq 0$ si $n < 0$)

Proposition 5 (inégalités triangulaires): Pour tous complexes z_1, z_2 :

(1) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(2) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Preuve:

2 Forme trigonométrique

2.1 Argument d'un complexe non nul

Définition 7 (représentation géométrique): *le plan est rapporté à un repère orthonormal direct.*

Soit $M(z)$ un point du plan (autre que l'origine) d'affixe z .

Une mesure de l'angle orienté (\vec{i}, \vec{OM}) est noté $\boxed{\theta = \arg(z)}$ et appelé **argument de z** .

Remarque 12 :

- (1) **ATTENTION!** Le complexe nul n'a pas d'argument puisque l'angle (\vec{i}, \vec{O}) n'est pas défini!
- (2) Un point M du plan d'affixe z est déterminé par son module et un argument:
on parle de **coordonnées polaires**.

Proposition 6 *Tout complexe non nul z s'écrit de manière unique:*

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

où:

- $r = |z| > 0$ est le module de z ,
- $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$ est défini à un multiple de 2π près.

L'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est la **forme trigonométrique** du complexe z .

Preuve:

Remarque 13 : Récapitulation des points importants de la preuve.

(1) Unicité de l'écriture: en d'autres termes, $\forall r_1, r_2 > 0, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$,

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

(2) Lien entre la forme algébrique ($z = a + ib$) et la forme trigonométrique ($z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$) pour tout complexe z non nul:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos(\arg z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\arg z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple 4 :

(1) $i = \dots$

(2) On rappelle: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $|j| = \dots$ (déjà vu)

Donc: $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

(3) $z = \sqrt{3} + i \neq 0$. $|z| = \dots$

Remarque 14 :

(1) $z \in \mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg z = 0 + k\pi$.

(2) $z \in i\mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

POINT METHODE 2 La remarque précédente donne une autre méthode (voir celle passant par le conjugué) permettant de montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur.

Remarque 15 Soit $z \in \mathbb{C}^*$: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors:
 $\bar{z} = r \cos \theta - ir \sin \theta = r \cos(-\theta) + ir \sin(-\theta)$ car le cosinus est pair et le sinus impair. Donc: $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$.
Conclusion: cette écriture étant unique, $|\bar{z}| = r = |z|$ (on le savait déjà!) et $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(\bar{z}) = -\arg z + 2k\pi$
On verra d'autres propriétés de l'argument dans la partie suivante (l'écriture exponentielle sera plus manipulable pour les preuves).

2.2 Écriture exponentielle

Notation 1 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Exemple 5 $e^{i\pi} =$

Remarque 16 $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

Proposition 7 :

* $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$(1) |e^{i\theta}| = 1 \quad (2) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ (réurrence).

Preuve: (basée sur les formules trigonométriques)

- (1) $|e^{i\theta}| = \dots$
- (2) $\overline{e^{i\theta}} = \dots$
- (3)

Remarque 17 $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

Conclusion: $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

Proposition 8 (formules d'Euler): $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve:

Proposition 9 (formule de Moivre): $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Preuve:

- * Pour $n \in \mathbb{N}$, c'est l'écriture trigonométrique de $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.
- * $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-in\theta} = \dots$

Définition 8 Si z est un complexe non nul de module r et d'argument θ , on peut écrire:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle**.

Exemple 6 :

- (1) $i = \dots, j = \dots, e^{2i\pi} = \dots, e^{i\pi} = \dots$
- (2) $\sqrt{3} + i = \dots, e^{2ik\pi} = \dots, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 18 Avec cette écriture, on retrouve facilement que $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

En effet: si $z = re^{i\theta}$ alors $\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = \dots$

Plus généralement:

Proposition 10 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$,

- (1) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi$ (réurrence).
- (2) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$ donc $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$.

Preuve: On note $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

- (1) $z_1 z_2 = \dots$
- (2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dots$

Remarque 19 Si $|z| = 1$ alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$

En effet: ...

Exemple 7 On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ vérifie:

2.3 Exponentielle complexe

Définition 9 Pour tout complexe $z = a + ib$, on définit l'**exponentielle de z** par:

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Proposition 11 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Preuve: Notons $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ alors:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^a e^{ib} e^c e^{id} = (e^a e^c) (e^{ib} e^{id}) = e^{a+c} e^{i(b+d)}.$$

Or $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$ donc $e^{z_1+z_2} = e^{a+c} e^{i(b+d)}$. Ce qui achève la preuve.

3 Applications

3.1 Équations du second degré à coefficients réels

3.1.1 Racines carrées d'un réel strictement négatif

Rappel 1 L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solutions réelles si $a < 0$.

(Si $a \geq 0, x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.)

Proposition 12 Si $a < 0$, on passe aux complexes: $z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$. Autrement dit:

Les racines carrées d'un réel $a < 0$ sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

Exemple 8 Résoudre $x^2 + 1 = 0$ dans \mathbb{C} .

Preuve: (on rappelle que $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$), donc :

3.1.2 Trinômes du second degré de discriminant $\Delta < 0$

Proposition 13 $\forall z \in \mathbb{C}$, considérons $P(z) = a z^2 + bz + c$, avec $a \neq 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Supposons $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors

* P admet deux racines complexes conjuguées:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

* Factorisation de P dans \mathbb{C} :

$$az^2 + bz + c = a \left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$$

Preuve:

Exemple 9 Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans \mathbb{C} .

3.1.3 Racines carrées d'un complexe

Soit un complexe a donné.

But: résoudre l'équation $z^2 = a$ dans \mathbb{C} . On distingue trois cas :

- Si a est un réel positif :

$$z^2 = a \iff z = \sqrt{a} \text{ ou } z = -\sqrt{a}, \text{ donc } \boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}}$$

- Si a est réel strictement négatif : voir la partie 3.1.1.

$$z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a} \text{ ou } z = -i\sqrt{-a} \text{ donc } \boxed{\mathcal{S} = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}}$$

- Si $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$: a est un complexe non nul, non réel.

Sous quelle forme chercher z ? Tout dépend de a : **peut-on écrire a sous forme exponentielle "facilement" ?**

– **SI OUI : on cherche z sous forme exponentielle.** Calculs à savoir refaire dans le cadre d'un exercice : il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = r e^{i\theta}$, donc :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff z^2 = \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 \\ &\iff z^2 - \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \left(z + \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \\ &\iff z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \right\}}$

Exemple 10 Résoudre $z^2 = \sqrt{3} - i$.

– **Si NON : on cherche z sous forme algébrique.** Calculs (et raisonnement d'analyse-synthèse) à savoir refaire dans le cadre d'un exercice: il existe deux réels x et y tels que $z = x + iy$, donc

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff (x + iy)^2 = Re(a) + i Im(a) \\ &\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = Re(a) + i Im(a) \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ 2xy &= Im(a) \end{cases} \end{aligned}$$

Astuce : penser au module ! $z^2 = a$ donc $|z|^2 = |a|$, soit : $x^2 + y^2 = |a|$, donc (équivalence perdue) :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ x^2 + y^2 &= |a| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ 2x^2 &= Re(a) + |a| \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

Donc on obtient x^2 donc deux valeurs pour x , puis y^2 donc deux valeurs pour y .

Conclusion : **Si z est solution, on obtient quatre valeurs possibles pour z .**

Réciproquement : penser au signe du produit. $xy = \frac{Im(a)}{2}$, donc le signe du produit nous dit si x et y sont de même signe ou de signe contraire, et il **reste deux solutions à l'équation**.

Exemple 11 Résoudre $z^2 = 3 + 4i$.

3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux, avec $\Delta < 0$

Rappel 2 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels a et b tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

Rappel 3 On appelle **équation caractéristique** de cette suite l'équation du second degré:

$$x^2 = ax + b \iff x^2 - ax - b = 0.$$

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Exprimer u_n en fonction de n .

1. **Étape 1: résolution de l'équation caractéristique.** de discriminant Δ .

2. **Étape 2: Expression de u_n .** Tout dépend du signe de $\Delta \dots$

(a) Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, voir le chapitre Suites usuelles.

(b) Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées, z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$.
En écrivant ces racines sous forme trigonométrique: $z_1 = r e^{i\theta}$ et $z_2 = r e^{-i\theta}$, on a:

$$\text{Proposition 14 : } \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))$$

Remarque 20 Donner λ_1 et λ_2 en fonction de u_0 et u_1 :

3.3 Équations trigonométriques de la forme $a \cos x + b \sin x = c$

Soient trois réels a, b, c . On se propose de résoudre dans \mathbb{R} une équation du type:

$$a \cos x + b \sin x = c$$

3.3.1 Transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$ en $r \cos(\theta - \varphi)$

Supposons que r et φ existent:

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= r \cos(\theta - \varphi) \\ \iff \cos(\theta - \varphi) &= \frac{a}{r} \cos(\theta) + \frac{b}{r} \sin(\theta) \quad (\text{ATTENTION!}) \\ \iff \underbrace{\quad\quad\quad}_{\text{formule trigonométrique}} &= \frac{a}{r} \cos(\theta) + \frac{b}{r} \sin(\theta) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre φ tel que: $\cos \varphi = \dots$ et $\sin \varphi = \dots$. Mais deux questions se posent:

* est-ce possible?

* qui prendre pour r ?

POINT METHODE 3 :

$$\text{Posons } z = a + ib$$

Remarque 21 Si $a = 0$ et $b = 0$, on a clairement $a \cos \theta + b \sin \theta = 0 = r \cos(\theta - \varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$.

On suppose donc dans la suite que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Donc $z \neq 0$ et z a une écriture trigonométrique.

On note $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| > 0$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$$

Conclusion : $z = a + ib = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$ donc :

$$\begin{cases} a = r \cos(\varphi) \\ b = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

On obtient (**calculs à savoir refaire**):

$$a \cos \theta + b \sin \theta = r (\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) = r \cos(\theta - \varphi).$$

Exemple 12 Transformer $\sqrt{3} \cos x - \sin x$.

3.3.2 Application à la résolution d'équations $a \cos x + b \sin x = c$

On suppose $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

POINT METHODE 4 :

1. **étape 1: utiliser la transformation**

Il vient:

$$a \cos x + b \sin x = c \iff r \cos(x - \varphi) = c \iff \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Question: cette équation admet-elle toujours des solutions?

Dans la suite, on suppose que $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1, 1]$.

2. **étape 2: Homogénéiser l'équation**

On transforme $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ en $\cos \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) afin de se ramener à l'équation trigonométrique $\cos(x - \varphi) = \cos \alpha$.
(on admet l'existence de $\alpha \dots$)

On termine maintenant la résolution: $\cos(x - \varphi) = \cos \alpha \iff \dots$

Exemple 13 Résoudre $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{3}$.

3.4 Formules d'Euler et applications

Rappel 4 : Formules d'Euler.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

3.4.1 Technique de l'angle moyen

But: calcul des parties réelle et imaginaire d'un complexe exprimé sous forme de somme d'exponentielles.

Proposition 15 (technique de l'angle moyen): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(1) e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

$$(2) e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Preuve (à savoir refaire): basée sur les formules d'Euler

POINT METHODE 5 : calcul des parties réelle et imaginaire.

Exemple 14 $z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$.

Pour quels réels θ , z est-il bien défini?

1. Technique de l'angle moyen pour chaque somme ou différence d'exponentielles:

2. Exhiber les parties réelle et imaginaire:

Rappel 5 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$ et $Im(\lambda z) = \lambda Im(z)$, donc:

3.4.2 Technique de calcul de sommes et produits contenant des termes en cosinus et sinus

POINT METHODE 6 : se ramener à une somme géométrique en passant par l'écriture exponentielle.

Exemple 15 Calculer $\sum_{k=0}^n \cos k$.

1. Interpréter le cosinus (resp. sinus) comme la partie réelle (resp. imaginaire) d'un complexe:

Remarque 22 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos \theta = Re(e^{i\theta}) \text{ et } \sin \theta = Im(e^{i\theta})}$

$$\cos k = Re(e^{ik})$$

2. Utiliser la Proposition 1:

$$\sum_{k=0}^n \cos k = \sum_{k=0}^n Re(\dots) = Re(\dots).$$

3. Se ramener à une somme géométrique:

$$\sum_{k=0}^n e^{ik} = \sum_{k=0}^n (\dots)^k \stackrel{??}{=} \dots$$

4. Calculer la partie réelle (ou imaginaire) du résultat complexe obtenu:

Dans cet exemple, on est ramenés à la technique de l'angle moyen. On obtient:

Conclusion:

$$\sum_{k=0}^n \cos k = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik} \right) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

3.4.3 Technique de linéarisation

But: transformer une expression contenant des termes en $\cos^p x$ et $\sin^p x$ en termes de la forme $\cos(px)$ et $\sin(px)$.

POINT METHODE 7 : technique de linéarisation.

Exemple 16 Linéariser $\cos^4 x$.

1. Utiliser les formules d'Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

2. Utiliser le binôme de Newton et penser à regrouper les termes:

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4$$

3. Utiliser à nouveau les formules d'Euler:

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} (6 + 2 \cos(4x) + 8 \cos(2x)) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x).$$

3.5 Application de la formule de Moivre

Rappel 6 : Formule de Moivre.

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

POINT METHODE 8 : technique d'antilinéarisation.

Exemple 17 Calculer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

1. Utiliser le binôme de Newton pour développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \dots$$

2. Utiliser la formule de Moivre pour développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta).$$

3. Égaler les parties réelle et imaginaire des deux expressions précédentes: