

# Nombres complexes

BCPST 1C – Mme MOREL

Pour déterminer toutes les solutions d'une équation polynomiale, il a fallu introduire de "nouveaux" nombres.

En effet, par exemple, l'équation  $x^2 = a$  n'a pas de solutions réelles si  $a < 0$ .

Ainsi, on nomme  $i$  un nombre tel que  $i^2 = -1$ , puis on construit rigoureusement l'ensemble des complexes  $\mathbb{C}$  (contenant  $\mathbb{R}$ ).

L'équation  $x^2 = a$  pour  $a < 0$  aura alors des solutions complexes.

## 1 Forme algébrique

### 1.1 Présentation

**Définition 1** L'ensemble des **nombres complexes** est l'ensemble  $\mathbb{C} = \{a + ib/a, b \in \mathbb{R}\}$  où  $i^2 = -1$ , muni d'une addition (notée  $+$ ) et d'une multiplication (notée  $\times$ ) qui vérifient les règles usuelles de l'addition et de la multiplication dans  $\mathbb{R}$ , soit:

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ .
- $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ .

**Définition 2 :**

(1) Soit  $z \in \mathbb{C}$ . L'écriture  $z = a + ib$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$  est la **forme algébrique** de  $z$ .

(2) Si  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,

$a$  est appelé **partie réelle** de  $z$ , notée  $a = \operatorname{Re}(z)$

$b$  est appelé **partie imaginaire** de  $z$ , notée  $b = \operatorname{Im}(z)$

**Remarque 1** La forme algébrique est unique, i.e. deux complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. En d'autres termes:  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,

$$a + ib = c + id \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

**Remarque 2**  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0$ .

Les nombres complexes de la forme  $a + i0$  sont donc naturellement identifiés à  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3** Les nombres complexes  $z$  tels que  $\operatorname{Re}(z) = 0$  (de la forme  $ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ) sont appelés les **imaginaires purs**. Leur ensemble est noté  $i\mathbb{R}$

**Théorème 1** Muni des opérations  $+$  et  $\times$ ,  $\mathbb{C}$  satisfait les propriétés suivantes :

1. **Associativité de l'addition :**

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z + (z' + z'') = (z + z') + z''.$$

2.  $0 = 0 + 0i$  est **élément neutre pour l'addition :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z.$$

3. **Existence d'un opposé pour l'addition :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C}, z + w = w + z = 0.$$

4. **Commutativité de l'addition :**

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, z + w = w + z.$$

5. **Associativité du produit :**

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'').$$

6.  $1 = 1 + 0i$  est **élément neutre pour le produit :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, 1 \times z = z \times 1 = z.$$

**7. Commutativité du produit :**

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, zw = wz.$$

**8. Distributivité de  $\times$  sur  $+$  :**

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z(z' + z'') = zz' + zz''.$$

**9. Existence d'un inverse pour  $\times$ , pour tout élément non nul :**

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists w \in \mathbb{C}, zw = wz = 1.$$

**Preuve:**

■

**Proposition 1**  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

(1)  $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$  et  $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$ .

(2)  $Re(\lambda z_1) = \lambda Re(z_1)$  et  $Im(\lambda z_1) = \lambda Im(z_1)$ .

**Preuve:**

■

**Remarque 3** On en déduit: pour tous complexes  $z_1, \dots, z_k$ ,

$$Re\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n Re(z_k) \text{ et } Im\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n Im(z_k).$$

**Définition 4 (représentation géométrique):**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) Soit  $M$  un point du plan de coordonnées  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

On dit que le complexe  $z = a + ib$  est l'**affixe** du point  $M$ , et on note  $M(z)$ .

L'axe des abscisses ( $O_x$ ) est l'**axe des réels** et l'axe des ordonnées ( $O_y$ ) est l'**axe des imaginaires purs**.

(2) Le vecteur  $\vec{OM} = a \vec{i} + b \vec{j}$  donc  $z$  est aussi l'**affixe du vecteur**  $\vec{OM}$

**Remarque 4 : ATTENTION!** Pas de relation d'ordre ( $\leq$ ) dans  $\mathbb{C}$ !!!

**Remarque 5 Interprétation géométrique de la somme de deux complexes.**

Soient  $M$  et  $M'$  deux points du plan complexe d'affixes  $z$  et  $z'$  respectivement. Le point  $N$  d'affixe  $z + z'$  donne la relation vectorielle:  $\vec{ON} = \vec{OM} + \vec{OM}'$ .

Donc le quadrilatère  $OMNM'$  est un parallélogramme et:

la somme de deux complexes  $z$  et  $z'$  est représentée par la diagonale principale du parallélogramme  $OMNM'$ .

De même, la différence  $z' - z$  est l'affixe du vecteur  $\vec{MM'}$ :

la différence de deux complexes  $z$  et  $z'$  est représentée par la diagonale secondaire du parallélogramme  $OMNM'$ .

## 1.2 Complexe conjugué

**Définition 5** Pour tout complexe  $z = a + ib$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), on définit son **conjugué**, notée  $\bar{z}$ , par:

$$\bar{z} = a - ib.$$

Donc  $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$  et  $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$ .

**Remarque 6 : Représentation géométrique.**

Soit  $M(z)$  le point du plan d'affixe  $z$ ,  $M(\bar{z})$  est le symétrique de  $M(z)$  par rapport à l'axe des abscisses ( $O_x$ ).

**Exemple 1 :**

(1)  $\bar{i} = \dots$

(2) On note le complexe  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  alors  $\bar{j} = \dots$

Remarquons que  $j^2 =$   $j^2 = \bar{j}$

**Proposition 2 (règles de calcul):** Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

(1)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ .

(2)  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$  (récurrence).

(3) Si  $z_2 \neq 0$ ,  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^n}$  (récurrence).

**Preuve:**

**Remarque 7** D'après (2) et (3):  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$  (avec  $z \neq 0$  si  $n < 0$ )

**Proposition 3** Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

(1)  $\bar{\bar{z}} = z$ .

(2)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  donc  $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$ .

(3)  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  donc  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ .

**POINT METHODE 1 : Comment montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur?**

1. En passant par le conjugué: calculer  $\bar{z}$  et aboutir à  $z$  ou  $-z$ .

2. En passant par un argument (voir partie 2.1)

**Preuve:**

■

### 1.3 Module

**Remarque 8 :** représentation géométrique.

Soit  $M(z)$  le point du plan d'affixe  $z = a + ib$ .  $z$  est aussi l'affixe du vecteur  $\vec{OM}$ .

On rappelle que la norme du vecteur  $\vec{OM}$  (ou la distance entre  $O$  et  $M$ ) est donnée par:  $\|\vec{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .  
Cela définit le module de  $z$ ...

**Définition 6** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . On définit son **module**, noté  $|z|$  par:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**Remarque 9 :**

(1) **Cohérence de la notation:** si  $z = a + i0$  alors  $\underbrace{|z|}_{\text{module}} = \sqrt{a^2} = \underbrace{|a|}_{\text{valeur absolue}}.$

Donc le module d'un réel coïncide avec sa valeur absolue, donc la notation du module est cohérente.

(2) On a aussi:  $|z| = \sqrt{z \bar{z}}$

En effet:  $z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ .

**Exemple 2**  $|i| = \dots$  et  $|j| =$  donc  $|j| = 1$

**Remarque 10 :**

(1) **ATTENTION!**  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0!!$

Le module étant une distance, c'est un **réel positif**. On peut donc comparer des modules (utiliser des encadrements) alors qu'on ne peut le faire pour des complexes (cf remarque 3).

(2) On a déjà vu que  $|z|$  est la distance entre  $O$  et  $M(z)$ . Généralisation:

Soient deux points du plan  $A$  et  $B$  respectivement d'affixes  $z_A = a + ib$  et  $z_B = c + id$ . On rappelle que le vecteur  $\vec{AB}$  a pour norme (distance entre  $A$  et  $B$ )  $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ .

Or  $c-a = \operatorname{Re}(z_B - z_A)$  et  $d-b = \operatorname{Im}(z_B - z_A)$  donc  $\|\vec{AB}\| = |z_B - z_A|$ .

Conclusion: le module  $|z_B - z_A|$  est la distance entre deux points  $A$  et  $B$

**Exemple 3 :**

(1) On note  $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$  l'ensemble des complexes de module 1.

C'est le **cercle unité** (de centre  $O$  et de rayon 1)!

(2) Soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $r \in [0, +\infty[$ .

Alors  $D = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| \leq r\}$  est le disque de centre  $A$  d'affixe  $a$  et de rayon  $r$ :

**Proposition 4 :**

(1)  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \iff z = 0 \text{ et } |\bar{z}| = |z|$ .

(2)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z^n| = |z|^n$  (récurrence).

(3)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \left| \frac{1}{z^n} \right| = \left| \frac{1}{z} \right|^n$

**Preuve:**

■

**Remarque 11** D'après (2) et (3):  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, |z^n| = |z|^n$  (avec  $z \neq 0$  si  $n < 0$ )

**Proposition 5 (inégalités triangulaires):** Pour tous complexes  $z_1, z_2$ :

(1)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

(2)  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

Preuve:

■

## 2 Forme trigonométrique

### 2.1 Argument d'un complexe non nul

**Définition 7** (représentation géométrique): le plan est rapporté à un repère orthonormal **direct**.

Soit  $M(z)$  un point du plan (autre que l'origine) d'affixe  $z$ .

Une mesure de l'angle orienté  $(\vec{i}, \vec{OM})$  est noté  $\boxed{\theta = \arg(z)}$  et appelé **argument de  $z$** .

**Remarque 12 :**

- (1) **ATTENTION!** Le complexe nul n'a pas d'argument puisque l'angle  $(\vec{i}, \vec{O})$  n'est pas défini!
- (2) Un point  $M$  du plan d'affixe  $z$  est déterminé par son module et un argument:  
on parle de **coordonnées polaires**.

**Proposition 6** Tout complexe non nul  $z$  s'écrit de manière unique:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

où:

- $r = |z| > 0$  est le module de  $z$ ,
- $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$  est défini à un multiple de  $2\pi$  près.

L'écriture  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  est la **forme trigonométrique** du complexe  $z$ .

**Preuve:**

■

**Remarque 13 :** Récapitulation des points importants de la preuve.

(1) Unicité de l'écriture: en d'autres termes,  $\forall r_1, r_2 > 0, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

(2) Lien entre la forme algébrique ( $z = a + ib$ ) et la forme trigonométrique ( $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$ ) pour tout complexe  $z$  non nul:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos(\arg z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\arg z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exemple 4 :**

(1)  $i = \dots$

(2) On rappelle:  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $|j| = \dots$  (déjà vu)

Donc: 
$$j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

(3)  $z = \sqrt{3} + i \neq 0$ .  $|z| = \dots$

**Remarque 14 :**

(1)  $z \in \mathbb{R} \iff z = 0$  ou  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\arg z = 0 + k\pi$ .

(2)  $z \in i\mathbb{R} \iff z = 0$  ou  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**POINT METHODE 2** La remarque précédente donne une autre méthode (voir celle passant par le conjugué) permettant de montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur.



**Remarque 15** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , avec  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Alors:

$\bar{z} = r \cos \theta - ir \sin \theta = r \cos(-\theta) + ir \sin(-\theta)$  car le cosinus est pair et le sinus impair. Donc:  $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$ .

Conclusion: cette écriture étant unique,  $|\bar{z}| = r = |z|$  (on le savait déjà!) et  $\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg(\bar{z}) = -\arg z + 2k\pi}$

On verra d'autres propriétés de l'argument dans la partie suivante (l'écriture exponentielle sera plus manipulable pour les preuves).

## 2.2 Écriture exponentielle

**Notation 1**  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ , on note  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

**Exemple 5**  $e^{i\pi} =$

**Remarque 16**  $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ .

**Proposition 7 :**

\*  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$(1) |e^{i\theta}| = 1 \quad (2) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

(3)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$  (récurrence).

**Preuve:** (basée sur les formules trigonométriques)

$$(1) |e^{i\theta}| = \dots$$

$$(2) \overline{e^{i\theta}} = \dots$$

$$(3)$$

■

**Remarque 17**  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

Conclusion:  $\boxed{\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}}$

**Proposition 8 (formules d'Euler):**  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\boxed{\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

**Preuve:**

■

**Proposition 9 (formule de Moivre):**  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}$$

**Preuve:**

\* Pour  $n \in \mathbb{N}$ , c'est l'écriture trigonométrique de  $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ .

\*  $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-in\theta} = \dots$

■

**Définition 8** Si  $z$  est un complexe non nul de module  $r$  et d'argument  $\theta$ , on peut écrire:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Cette écriture est appelée **forme exponentielle**.

**Exemple 6 :**

- (1)  $i = \dots, j = \dots, e^{2i\pi} = \dots, e^{i\pi} = \dots$
- (2)  $\sqrt{3} + i = \dots, e^{2ik\pi} = \dots, \forall k \in \mathbb{Z}.$

**Remarque 18** Avec cette écriture, on retrouve facilement que  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

En effet: si  $z = re^{i\theta}$  alors  $\bar{z} = \overline{re^{i\theta}} = \dots$

Plus généralement:

**Proposition 10**  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*,$

- (1)  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi$  (récurrence).
- (2)  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$  donc  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi.$

**Preuve:** On note  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  et  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ .

- (1)  $z_1 z_2 = \dots$
- (2)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dots$

■

**Remarque 19** Si  $|z| = 1$  alors  $\bar{z} = \frac{1}{z}$

En effet: ...

**Exemple 7** On rappelle que  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  vérifie:

## 2.3 Exponentielle complexe

**Définition 9** Pour tout complexe  $z = a + ib$ , on définit l'exponentielle de  $z$  par:

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

**Proposition 11**  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$

**Preuve:** Notons  $z_1 = a + ib$  et  $z_2 = c + id$  alors:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^a e^{ib} e^c e^{id} = (e^a e^c) (e^{ib} e^{id}) = e^{a+c} e^{i(b+d)}.$$

Or  $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$  donc  $e^{z_1+z_2} = e^{a+c} e^{i(b+d)}$ . Ce qui achève la preuve.

■

## 3 Applications

### 3.1 Équations du second degré à coefficients réels

#### 3.1.1 Racines carrées d'un réel strictement négatif

**Rappel 1** L'équation  $x^2 = a$  n'admet pas de solutions réelles si  $a < 0$ .

(Si  $a \geq 0$ ,  $x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$  ou  $x = -\sqrt{a}$ .)

**Proposition 12** Si  $a < 0$ , on passe aux complexes:  $z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a}$  ou  $z = -i\sqrt{-a}$ .

Autrement dit:

$$\text{Les racines carrées d'un réel } a < 0 \text{ sont } i\sqrt{-a} \text{ et } -i\sqrt{-a}$$

**Exemple 8** Résoudre  $x^2 + 1 = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Preuve:** (on rappelle que  $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ ), donc :

■

### 3.1.2 Trinômes du second degré de discriminant $\Delta < 0$

**Proposition 13**  $\forall z \in \mathbb{C}$ , considérons  $P(z) = az^2 + bz + c$ , avec  $a \neq 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).

Supposons  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , alors

\*  $P$  admet deux racines complexes conjuguées:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

\* Factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}$ :

$$az^2 + bz + c = a \left( z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left( z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)$$

**Preuve:**

■

**Exemple 9** Résoudre  $x^2 + x + 1 = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

### 3.1.3 Racines carrées d'un complexe

Soit un complexe  $a$  donné.

**But:** résoudre l'équation  $z^2 = a$  dans  $\mathbb{C}$ . On distingue trois cas :

- Si  $a$  est un réel positif :

$$z^2 = a \iff z = \sqrt{a} \text{ ou } z = -\sqrt{a}, \text{ donc } \boxed{\mathcal{S} = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}}$$

- Si  $a$  est réel strictement négatif : voir la partie 3.1.1.

$$z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a} \text{ ou } z = -i\sqrt{-a} \text{ donc } \boxed{\mathcal{S} = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}}$$

- Si  $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$  :  $a$  est un complexe non nul, non réel.

Sous quelle forme chercher  $z$  ? Tout dépend de  $a$ : peut-on écrire  $a$  sous forme exponentielle "facilement"?

- **SI OUI : on cherche  $z$  sous forme exponentielle.** Calculs à savoir refaire dans le cadre d'un exercice : il existe  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $a = r e^{i\theta}$ , donc :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff z^2 = \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 \\ &\iff z^2 - \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \left(z + \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \\ &\iff z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Conclusion :  $\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \right\}$

**Exemple 10** Résoudre  $z^2 = \sqrt{3} - i$ .

- **Si NON : on cherche  $z$  sous forme algébrique.** Calculs (et raisonnement d'analyse-synthèse) à savoir refaire dans le cadre d'un exercice: il existe deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $z = x + i y$ , donc

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff (x + i y)^2 = Re(a) + i Im(a) \\ &\iff (x^2 - y^2) + i(2xy) = Re(a) + i Im(a) \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ 2xy &= Im(a) \end{cases} \end{aligned}$$

**Astuce : penser au module !**  $z^2 = a$  donc  $|z|^2 = |a|$ , soit :  $x^2 + y^2 = |a|$ , donc (équivalence perdue) :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ x^2 + y^2 &= |a| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ 2x^2 &= Re(a) + |a| \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

Donc on obtient  $x^2$  donc deux valeurs pour  $x$ , puis  $y^2$  donc deux valeurs pour  $y$ .

Conclusion : **Si  $z$  est solution, on obtient quatre valeurs possibles pour  $z$ .**

**Réciproquement : penser au signe du produit.**  $xy = \frac{Im(a)}{2}$ , donc le signe du produit nous dit si  $x$  et  $y$  sont de même signe ou de signe contraire, et il reste deux solutions à l'équation.

**Exemple 11** Résoudre  $z^2 = 3 + 4i$ .

## 3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux, avec $\Delta < 0$

**Rappel 2** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

**Rappel 3** On appelle **équation caractéristique** de cette suite l'équation du second degré:

$$x^2 = ax + b \iff x^2 - ax - b = 0.$$

**CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .**

1. **Étape 1: résolution de l'équation caractéristique.** de discriminant  $\Delta$ .

2. **Étape 2: Expression de  $u_n$ .** Tout dépend du signe de  $\Delta \dots$

(a) Si  $\Delta > 0$  ou  $\Delta = 0$ , voir le chapitre Suites usuelles.

(b) Si  $\Delta < 0$ , l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées,  $z_1$  et  $z_2 = \overline{z_1}$ .  
En écrivant ces racines sous forme trigonométrique:  $z_1 = r e^{i\theta}$  et  $z_2 = r e^{-i\theta}$ , on a:

**Proposition 14 :**  $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))$

**Remarque 20** Donner  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en fonction de  $u_0$  et  $u_1$ :

## 3.3 Équations trigonométriques de la forme $a \cos x + b \sin x = c$

Soient trois réels  $a, b, c$ . On se propose de résoudre dans  $\mathbb{R}$  une équation du type:

$$a \cos x + b \sin x = c$$

### 3.3.1 Transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$ en $r \cos(\theta - \varphi)$

Supposons que  $r$  et  $\varphi$  existent:

$$\begin{aligned} a \cos \theta + b \sin \theta &= r \cos(\theta - \varphi) \\ \iff \cos(\theta - \varphi) &= \frac{a}{r} \cos(\theta) + \frac{b}{r} \sin(\theta) \quad (\text{ATTENTION!}) \\ \iff \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{formule trigonométrique}} &= \frac{a}{r} \cos(\theta) + \frac{b}{r} \sin(\theta) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $\varphi$  tel que:  $\cos \varphi = \dots\dots$  et  $\sin \varphi = \dots\dots$ . Mais deux questions se posent:

- \* est-ce possible?
- \* qui prendre pour  $r$ ?

**POINT METHODE 3 :**

$$\text{Posons } \boxed{z = a + ib}$$

**Remarque 21** Si  $a = 0$  et  $b = 0$ , on a clairement  $a \cos \theta + b \sin \theta = 0 = r \cos(\theta - \varphi)$ , pour tout  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

On suppose donc dans la suite que  $\boxed{a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$  Donc  $z \neq 0$  et  $z$  a une écriture trigonométrique.

On note  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| > 0$ , donc il existe  $\varphi \in \mathbb{R}$  tel que

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$$

Conclusion :  $z = a + ib = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$  donc :

$$\begin{cases} a = r \cos(\varphi) \\ b = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

On obtient (**calculs à savoir refaire**):

$$a \cos \theta + b \sin \theta = r (\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) = r \cos(\theta - \varphi).$$

**Exemple 12** Transformer  $\sqrt{3} \cos x - \sin x$ .

### 3.3.2 Application à la résolution d'équations $a \cos x + b \sin x = c$

On suppose  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$

**POINT METHODE 4 :**

**1. étape 1: utiliser la transformation**

Il vient:

$$a \cos x + b \sin x = c \iff r \cos(x - \varphi) = c \iff \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Question: cette équation admet-elle toujours des solutions?

Dans la suite, on suppose que  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1, 1]$ .

**2. étape 2: Homogénéiser l'équation**

On transforme  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  en  $\cos \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) afin de se ramener à l'équation trigonométrique  $\cos(x - \varphi) = \cos \alpha$ .

(on admet l'existence de  $\alpha \dots$ )

On termine maintenant la résolution:  $\cos(x - \varphi) = \cos \alpha \iff \dots$

**Exemple 13** Résoudre  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{3}$ .

## 3.4 Formules d'Euler et applications

**Rappel 4 : Formules d'Euler.**

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

### 3.4.1 Technique de l'angle moyen

**But:** calcul des parties réelle et imaginaire d'un complexe exprimé sous forme de somme d'exponentielles.

**Proposition 15 (technique de l'angle moyen):**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$(1) e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

$$(2) e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

**Preuve (à savoir refaire):** basée sur les formules d'Euler

**POINT METHODE 5 :** calcul des parties réelle et imaginaire.

**Exemple 14**  $z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$ .

Pour quels réels  $\theta$ ,  $z$  est-il bien défini?

1. Technique de l'angle moyen pour chaque somme ou différence d'exponentielles:

2. Exhiber les parties réelle et imaginaire:

**Rappel 5**  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$  et  $Im(\lambda z) = \lambda Im(z)$ , donc:

### 3.4.2 Technique de calcul de sommes et produits contenant des termes en cosinus et sinus

**POINT METHODE 6 :** se ramener à une somme géométrique en passant par l'écriture exponentielle.

**Exemple 15** Calculer  $\sum_{k=0}^n \cos k$ .

1. Interpréter le cosinus (resp. sinus) comme la partie réelle (resp. imaginaire) d'un complexe:

**Remarque 22**  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $\cos \theta = Re(e^{i\theta})$  et  $\sin \theta = Im(e^{i\theta})$

$$\cos k = Re(e^{ik})$$

2. Utiliser la Proposition 1:

$$\sum_{k=0}^n \cos k = \sum_{k=0}^n Re(\dots) = Re(\dots).$$

3. Se ramener à une somme géométrique:

$$\sum_{k=0}^n e^{ik} = \sum_{k=0}^n (\dots)^k = \dots$$

4. Calculer la partie réelle (ou imaginaire) du résultat complexe obtenu:

Dans cet exemple, on est ramenés à la technique de l'angle moyen. On obtient:

Conclusion:

$$\sum_{k=0}^n \cos k = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ik}\right) = \frac{\cos(\frac{n}{2}) \sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}.$$

### 3.4.3 Technique de linéarisation

**But:** transformer une expression contenant des termes en  $\cos^p x$  et  $\sin^p x$  en termes de la forme  $\cos(px)$  et  $\sin(px)$ .

**POINT METHODE 7 : technique de linéarisation.**

**Exemple 16** Linéariser  $\cos^4 x$ .

1. Utiliser les formules d'Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

2. Utiliser le binôme de Newton et penser à regrouper les termes:

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

3. Utiliser à nouveau les formules d'Euler:

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} (6 + 2 \cos(4x) + 8 \cos(2x)) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x).$$

## 3.5 Application de la formule de Moivre

**Rappel 6 : Formule de Moivre.**

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R},$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

**POINT METHODE 8 : technique d'antilinéarisation.**

**Exemple 17** Calculer  $\cos(3\theta)$  et  $\sin(3\theta)$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

1. Utiliser le binôme de Newton pour développer  $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \dots$$

2. Utiliser la formule de Moivre pour développer  $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta).$$

3. Égaler les parties réelle et imaginaire des deux expressions précédentes: