Nombres complexes

BCPST 1C - Mme MOREL

Pour déterminer toutes les solutions d'une équation polynômiale, il a fallu introduire de "nouveaux" nombres.

En effet, par exemple, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions réelles si a < 0.

Ainsi, on nomme i un nombre tel que $i^2 = -1$, puis on construit rigoureusement l'ensemble des complexes \mathbb{C} (contenant \mathbb{R}). L'équation $x^2 = a$ pour a < 0 aura alors des solutions complexes.

1 Forme algébrique

1.1 Présentation

Définition 1 L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib/a, b \in \mathbb{R}\}\$ où $i^2 = -1$, muni d'une addition (notée +) et d'une multiplication (notée ×) qui vérifient les règles usuelles de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{R} , soit:

- (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d).
- \bullet $(a+ib) \times (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc).$

$D\'{e}finition 2:$

- (1) Soit $z \in \mathbb{C}$. L'écriture z = a + ib, avec $a, b \in \mathbb{R}$ est la forme algébrique de z.
- (2) $Si z = a + ib \in \mathbb{C}$,

a est appelé partie réelle de z, notée a = Re(z)

b est appelé partie imaginaire de z, notée b = Im(z)

Remarque 1 La forme algébrique est unique, i.e. deux complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. En d'autres termes: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

Remarque 2 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0$.

Les nombres complexes de la forme a+i0 sont donc naturellement identifiés à \mathbb{R} .

Définition 3 Les nombres complexes z tels que Re(z) = 0 (de la forme $ib, b \in \mathbb{R}$) sont appelés les **imaginaires purs**. Leur ensemble est noté $i\mathbb{R}$

Théorème 1 Muni des opérations + et \times , \mathbb{C} satisfait les propriétés suivantes :

1. Associativité de l'addition :

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, z + (z' + z'') = (z + z') + z''.$$

2. 0 = 0 + 0i est élément neutre pour l'addition :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z+0=0+z=z.$$

3. Existence d'un opposé pour l'addition :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C}, z + w = w + z = 0.$$

4. Commutativité de l'addition :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, z + w = w + z.$$

5. Associativité du produit :

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (zz')z'' = z(z'z'').$$

 $6. \ 1 = 1 + 0i$ est élément neutre pour le produit :

$$\forall z \in \mathbb{C}, 1 \times z = z \times 1 = z.$$

1

7. Commutativité du produit :

$$\forall z,w\in\mathbb{C},zw=wz.$$

8. Distributivité de \times sur +:

$$\forall z,z',z''\in\mathbb{C}\,,\,z(z'+z'')=zz'+zz''.$$

9. Existence d'un inverse pour \times , pour tout élément non nul :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists w \in \mathbb{C}, zw = wz = 1.$$

Preuve:

Proposition 1 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$

- (1) $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ et $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$.
- (2) $Re(\lambda z_1) = \lambda Re(z_1)$ et $Im(\lambda z_1) = \lambda Im(z_1)$.

Preuve:

Remarque 3 On en déduit: pour tous complexes z_1, \ldots, z_k ,

$$Re\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Re(z_k) \text{ et } Im\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Im(z_k).$$

Définition 4 (représentation géométrique):

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

(1) Soit M un point du plan de coordonnées (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$.

On dit que le complexe z = a + ib est l'affixe du point M, et on note M(z).

L'axe des abscisses (O_x) est l'axe des réels et l'axe des ordonnées (O_y) est l'axe des imaginaires purs.

(2) Le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a} \stackrel{\rightarrow}{i} + \overrightarrow{b} \stackrel{\rightarrow}{j}$ donc z est aussi l'affixe du vecteur \overrightarrow{OM}

Remarque 4 : ATTENTION! Pas de relation d'ordre (\leqslant) dans $\mathbb{C}!!!$

Remarque 5 Interprétation géométrique de la somme de deux complexes.

Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes z et z' respectivement. Le point N d'affixe z + z' donne la relation vectorielle: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}'$.

Donc le quadrilatère OMNM' est un parallélogramme et:

la somme de deux complexes z et z' est représentée par la diagonale principale du parallélogramme OMNM'.

De même, la différence z'-z est l'affixe du vecteur \overrightarrow{MM}' :

la différence de deux complexes z et z' est représentée par la diagonale secondaire du parallélogramme OMNM'.

1.2 Complexe conjugué

Définition 5 Pour tout complexe z = a + ib $(a, b \in \mathbb{R})$, on définit son **conjugué**, notée \overline{z} , par:

$$\overline{z} = a - ib$$
.

Donc
$$Re(\overline{z}) = Re(z)$$
 et $Im(\overline{z}) = -Im(z)$.

Remarque 6 : Représentation géométrique.

Soit M(z) le point du plan d'affixe $z, M(\overline{z})$ est le symétrique de M(z) par rapport à l'axe des abscisses (O_x) .

Exemple 1:

- (1) $\overline{i} = \dots$ (2) On note le complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\overline{j} = \dots$ $\overline{j} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Remarquons que $j^2 =$

donc:
$$j^2 = \overline{j}$$

Proposition 2 (règles de calcul): Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- (1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.
- (2) $\overline{z_1} \, \overline{z_2} = \overline{z_1} \, \overline{z_2} \, donc \, \forall n \in \mathbb{N}, \, \forall z \in \mathbb{C}, \, \overline{z^n} = \overline{z}^n \, (récurrence).$
- $(3) \ Si \ z_2 \neq 0, \ \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \ donc \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall z \in \mathbb{C}^*, \ \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\overline{z}^n} \ (\textit{r\'ecurrence}).$

Preuve:

Remarque 7 D'après (2) et (3): $| \forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, \overline{z^n} = \overline{z}^n \text{ (avec } z \neq 0 \text{ si } n < 0)$

Proposition 3 Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $(1) \ \overline{\overline{z}} = z.$
- (2) $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \ donc \ z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}.$ (3) $Im(z) = \frac{z \overline{z}}{2i} \ donc \ z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}.$

POINT METHODE 1 : Comment montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur?

1. En passant par le conjugué: calculer \overline{z} et aboutir à z ou -z.

2.	En	passant	par un	argument	(voir	partie	2.1)
Prei	ıve:						

1.3 Module

Remarque 8 : représentation géométrique.

Soit M(z) le point du plan d'affixe z = a + ib. z est aussi l'affixe du vecteur \overrightarrow{OM} .

On rappelle que la norme du vecteur \overrightarrow{OM} (ou la distance entre O et M) est donnée par: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cela définit le module de z...

Définition 6 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit son module, noté |z| par:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \,.$$

Remarque 9:

(1) Cohérence de la notation: si z = a + i0 alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ valeur absolue

Donc le module d'un réel coïncide avec sa valeur absolue , donc la notation du module est cohérente.

(2) On a aussi: $|z| = \sqrt{z \, \overline{z}}$

En effet: $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$.

Exemple 2
$$|i| = \dots$$
 et $|j| =$ donc $|j| = 1$

Remarque 10:

(1) **ATTENTION!** $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 0!!$

Le module étant une distance, c'est un **réel positif**. On peut donc comparer des modules (utiliser des encadrements) alors qu'on ne peut le faire pour des complexes (cf remarque 3).

(2) On a déjà vu que |z| est la distance entre O et M(z). Généralisation:

Soient deux points du plan A et B respectivement d'affixes $z_A = a + ib$ et $z_B = c + id$. On rappelle que le vecteur \overrightarrow{AB} a pour norme (distance entre A et B) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

Or
$$c - a = Re(z_B - z_A)$$
 et $d - b = Im(z_B - z_A)$ donc $\|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$.

Conclusion: le module $|z_B - z_A|$ est la distance entre deux points A et B

Exemple 3:

(1) On note $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$ l'ensemble des complexes de module 1.

C'est le **cercle unité** (de centre O et de rayon 1)!

(2) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in [0, +\infty[$.

Alors $D = \{z \in \mathbb{C}/|z-a| \leq r\}$ est le disque de centre A d'affixe a et de rayon r:

Proposition 4:

- (1) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \iff z = 0 \text{ et } |\overline{z}| = |z|$. (2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z^n| = |z|^n$ (récurrence). (3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \left|\frac{1}{z}\right|^n$

Preuve:

Remarque 11 D'après (2) et (3): $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}, |z^n| = |z|^n \text{ (avec } z \neq 0 \text{ si } n < 0)$

Proposition 5 (inégalités triangulaires): Pour tous complexes z_1, z_2 :

- $(1) |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$
- (2) $|z_1 z_2| \geqslant ||z_1| |z_2||$.

2 Forme trigonométrique

2.1 Argument d'un complexe non nul

Définition 7 (représentation géométrique): le plan est rapporté à un repère orthonormal direct.

Soit M(z) un point du plan (autre que l'origine) d'affixe z. Une mesure de l'angle orienté $(\stackrel{\rightarrow}{i}, \stackrel{\rightarrow}{OM})$ est noté $\boxed{\theta = \arg(z)}$ et appelé $\operatorname{argument}$ de z.

Remarque 12:

- (1) **ATTENTION!** Le complexe nul n'a pas d'argument puisque l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{O})$ n'est pas défini!
- (2) Un point M du plan d'affixe z est déterminé par son module et un argument: on parle de **coordonnées polaires**.

 ${\it Proposition \ 6}$ Tout complexe non nul z s'écrit de manière unique:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\,$$

où:

- r = |z| > 0 est le module de z,
- $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}$ est défini à un multiple de 2π près.

L'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est la forme trigonométrique du complexe z.

Preuve:

Remarque 13 : Récapitulation des points importants de la preuve.

(1) Unicité de l'écriture: en d'autres termes, $\forall r_1, r_2 > 0, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$,

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

(2) Lien entre la forme algébrique (z = a + ib) et la forme trigonométrique $(z = |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$ pour tout complexe z non nul:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
, $\cos(\arg z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\arg z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple 4:

(1)
$$i = ...$$

(2) On rappelle:
$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
. $|j| = \dots$ (déjà vu)

Donc:
$$\boxed{j = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})}$$

$$(3) z = \sqrt{3} + i \neq 0, |z| = \dots$$

Remarque 14:

(1)
$$z \in \mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que arg } z = 0 + k\pi.$$

(1)
$$z \in \mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg z = 0 + k\pi.$$

(2) $z \in i\mathbb{R} \iff z = 0 \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

POINT METHODE 2 La remarque précédente donne une autre méthode (voir celle passant par le conjugué) permettant de montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur.

Remarque 15 Soit $z \in \mathbb{C}^*$: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec r > 0 et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors:

 $\overline{z} = r \cos \theta - ir \sin \theta = r \cos(-\theta) + ir \sin(-\theta)$ car le cosinus est pair et le sinus impair. Donc: $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$.

Conclusion: cette écriture étant unique, $|\overline{z}| = r = |z|$ (on le savait déjà!) et $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(\overline{z}) = -\arg z + 2k\pi$

On verra d'autres propriétés de l'argument dans la partie suivante (l'écriture exponentielle sera plus manipulable pour les preuves).

2.2 Écriture exponentielle

Notation 1 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Remarque 16 $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}.$

Proposition 7:

 $* \forall \theta \in \mathbb{R},$

(1)
$$|e^{i\theta}| = 1$$
 (2) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

(3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}. \ Donc \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n \ (r\'{e}currence).$

Preuve: (basée sur les formules trigonométriques)

- $(1) |e^{i\hat{\theta}}| = \dots$
- (2) $\overline{e^{i\theta}} = \dots$
- (3)

Remarque 17 $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

Conclusion: $\frac{1}{a^{i\theta}}$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \ \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Proposition 8 (formules d'Euler): $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} et \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Preuve:

Proposition 9 (formule de Moivre): $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R},$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Preuve:

- * Pour $n \in \mathbb{N},$ c'est l'écriture trigonométrique de $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n.$
- * $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-in\theta} = \dots$

Définition 8 Si z est un complexe non nul de module r et d'argument θ , on peut écrire:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Cette écriture est appelée forme exponentielle.

Exemple 5:

(1)
$$i = \dots, j = \dots, e^{2i\pi} = \dots, e^{i\pi} = \dots$$

(2)
$$\sqrt{3} + i = \dots$$
, $e^{2ik\pi} = \dots$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 18 Avec cette écriture, on retrouve facilement que $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

En effet: si $z = re^{i\theta}$ alors $\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = \dots$

Plus généralement:

Proposition 10 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$,

(1)
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi \ donc \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall z \in \mathbb{C}^*, \ \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi \ (récurrence).$$

(2)
$$\forall z \in \mathbb{C}^*$$
, $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \ donc \ \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$.

Preuve: On note $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

$$(1) z_1 z_2 = \dots$$

(2)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dots$$

Remarque 19 Si
$$|z| = 1$$
 alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$

En effet: ...

Exemple 6 On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ vérifie:

2.3 Exponentielle complexe

Définition 9 Pour tout complexe z = a + ib, on définit l'exponentielle de z par:

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Proposition 11 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$

Preuve: Notons $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ alors:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^a e^{ib} e^c e^{id} = (e^a e^c) (e^{ib} e^{id}) = e^{a+c} e^{i(b+d)}$$
.

Or $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$ donc $e^{z_1+z_2} = e^{a+c}e^{i(b+d)}$. Ce qui achève la preuve.

3 Applications

3.1 Equations du second degré à coefficients réels

3.1.1 Racines carrées d'un réel strictement négatif

Rappel 1 L'équation $x^2=a$ n'admet pas de solutions réelles si a<0. (Si $a\geqslant 0,\ x^2=a\iff x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$.)

Proposition 12 Si a < 0, on passe aux complexes: $z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$. Autrement dit:

Les racines carrées d'un réel
$$a < 0$$
 sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

Preuve: (on rappelle que $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$), donc :

3.1.2 Trinômes du second degré de discriminant $\Delta < 0$

Proposition 13 $\forall z \in \mathbb{C}$, considérons $P(z) = az^2 + bz + c$, avec $\underline{a \neq 0}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. Supposons $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors

* P admet deux racines complexes conjuguées:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \ et \ z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \ .$$

* Factorisation de P dans \mathbb{C} :

$$az^{2} + bz + c = a\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

Preuve:

3.1.3 Racines carrées d'un complexe

Soit un complexe a donné.

But: résoudre l'équation $z^2 = a$ dans \mathbb{C} . On distingue trois cas :

• Si a est un réel positif :

$$z^2 = a \iff z = \sqrt{a} \text{ ou } z = -\sqrt{a}, \text{ donc } \boxed{S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}}$$

$$z^2 = a \iff z = i\sqrt{-a} \text{ ou } z = -i\sqrt{-a} \text{ donc } S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$$

• Si $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$: a est un complexe non nul, non réel.

Sous quelle forme chercher z? Tout dépend de a: peut-on écrire a sous forme exponentielle "facilement"?

- SI OUI : on cherche z sous forme exponentielle. Calculs à savoir refaire dans le cadre d'un exercice : il existe r > 0 et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = r e^{i\theta}$, donc :

$$z^{2} = a \iff z^{2} = \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^{2}$$

$$\iff z^{2} - \left(\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^{2} = 0$$

$$\iff \left(z - \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \left(z + \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 0$$

$$\iff z = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Conclusion :
$$S = \left\{ \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \right\}$$

Exemple 7 Résoudre $z^2 = \sqrt{3} - i$.

- Si NON : on cherche z sous forme algébrique. Calculs (et raisonnement d'analyse-synthèse) à savoir refaire dans le cadre d'un exercice: il existe deux réels x et y tels que z = x + i y, donc

$$z^{2} = a \iff (x + iy)^{2} = Re(a) + i Im(a)$$

$$\iff (x^{2} - y^{2}) + i (2xy) = Re(a) + i Im(a)$$

$$\iff \begin{cases} x^{2} - y^{2} &= Re(a) \\ 2xy &= Im(a) \end{cases}$$

Astuce : penser au module ! $z^2 = a$ donc $|z|^2 = |a|$, soit : $x^2 + y^2 = |a|$, donc (équivalence perdue) :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ x^2 + y^2 &= |a| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= Re(a) \\ 2x^2 &= Re(a) + |a| \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

Donc on obtient x^2 donc deux valeurs pour x, puis y^2 donc deux valeurs pour y.

Conclusion: Si z est solution, on obtient quatre valeurs possibles pour z.

Réciproquement : penser au signe du produit. $xy = \frac{Im(a)}{2}$, donc le signe du produit nous dit si x et y sont de même signe ou de signe contraire, et il reste deux solutions à l'équation.

Exemple 8 Résoudre $z^2 = 3 + 4i$.

3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux, avec $\Delta < 0$

Rappel 2 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux réels a et b tels que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

Rappel 3 On appelle équation caractéristique de cette suite l'équation du second degré:

$$x^2 = ax + b \iff x^2 - ax - b = 0$$
.

CAPACITÉ EXIGIBLE 1 : Exprimer u_n en fonction de n.

- 1. Étape 1: résolution de l'équation caractéristique, de discriminant Δ .
- 2. Étape 2: Expression de u_n . Tout dépend du signe de Δ ...
 - (a) Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, voir le chapitre Suites usuelles.

(b) Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées, z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$. En écrivant ces racines sous forme trigonométrique: $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$, on a:

Proposition 14:
$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}/\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta))$$

Remarque 20 Donner λ_1 et λ_2 en fonction de u_0 et u_1 :

3.3 Équations trigonométriques de la forme $a \cos x + b \sin x = c$

Soient trois réels a, b, c. On se propose de résoudre dans \mathbb{R} une équation du type:

$$a\cos x + b\sin x = c$$

3.3.1 Transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $r\cos(\theta - \varphi)$

Supposons que r et φ existent:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\cos(\theta - \varphi)$$

$$\iff \cos(\theta - \varphi) = \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{b}{r}\sin(\theta) \text{ (ATTENTION!}$$

$$\iff \underbrace{\qquad \qquad }_{\text{formule trigonométrique}} = \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{b}{r}\sin(\theta)$$

Il suffit donc de prendre φ tel que: $\cos \varphi = \dots$ et $\sin \varphi = \dots$ Mais deux questions se posent:

- * est-ce possible?
- * qui prendre pour r?

Si z est un nombre complexe de module 1, alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\varphi}$. En d'autres termes: si $z = u + iv \in \mathbb{C}$ tel que (donner une condition sur u et v pour que |z| = 1): alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \varphi = \dots$ et $\sin \varphi = \dots$

Conclusion: dans notre cas, φ existe si: $r \neq 0$ et $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$. Et on récupère une équation sur r:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1 \iff \frac{a^2 + b^2}{r^2} = 1 \iff \dots$$

POINT METHODE 3:

Posons
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Remarque 21 Si a=0 et b=0, on a clairement $a\cos\theta+b\sin\theta=0=r\cos(\theta-\varphi)$, pour tout $\varphi\in\mathbb{R}$.

On suppose donc dans la suite que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Alors
$$r \neq 0$$
 et $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = \dots$, donc:

il existe
$$\varphi \in \mathbb{R}$$
 (unique dans $[0,2\pi[)$ tel que $\cos \varphi = \frac{a}{r}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{r}$

On obtient (calculs à savoir refaire):

$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\left(\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{b}{r}\sin\theta\right) = r\left(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\right) = r\cos(\theta - \varphi).$$

Exemple 9 Transformer $\sqrt{3} \cos x - \sin x$.

Application à la résolution d'équations $a \cos x + b \sin x = c$

On suppose $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

POINT METHODE 4:

1. étape 1: utiliser la transformation

Posant $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que $\cos\varphi=\frac{a}{r}$ et $\sin\varphi=\frac{b}{r},$ il vient:

$$a\cos x + b\sin x = c \iff r\cos(x - \varphi) = c \iff \cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Question: cette équation admet-elle toujours des solutions?

Dans la suite, on suppose que $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$.

2. étape 2: Homogénéiser l'équation On transforme $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en $\cos \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) afin de se ramener à l'équation trigonométrique $\cos(x-\varphi)=\cos \alpha$. (on admet l'existence de α ...)

On termine maintenant la résolution: $\cos(x - \varphi) = \cos \alpha \iff \dots$

Exemple 10 Résoudre $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{3}$.

Formules d'Euler et applications

Rappel 4: Formules d'Euler.

 $\forall \theta \in \mathbb{R},$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

3.4.1 Technique de l'angle moyen

But: calcul des parties réelle et imaginaire d'un complexe exprimé sous forme de somme d'exponentielles.

Proposition 15 (technique de l'angle moyen): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(1)
$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 2\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}$$
.

(2)
$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})e^{i\frac{\alpha + \beta}{2}}$$
.

Preuve (à savoir refaire): basée sur les formules d'Euler

POINT METHODE 5 : calcul des parties réelle et imaginaire.

Exemple 11 $z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$.

Pour quels réels θ , z est-il bien défini?

- 1. Technique de l'angle moyen pour chaque somme ou différence d'exponentielles:
- 2. Exhiber les parties réelle et imaginaire:

Rappel 5 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$ et $Im(\lambda z) = \lambda Im(z)$, donc:

3.4.2 Technique de calcul de sommes et produits contenant des termes en cosinus et sinus POINT METHODE 6 : se ramener à une somme géométrique en passant par l'écriture exponentielle.

Exemple 12 Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos k$.

1. Interpréter le cosinus (resp. sinus) comme la partie réelle (resp. imaginaire) d'un complexe:

Remarque 22
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \cos \theta = Re(e^{i\theta}) \text{ et } \sin \theta = Im(e^{i\theta})$$

$$\cos k = Re(e^{ik})$$

2. Utiliser la Proposition 1:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k = \sum_{k=0}^{n} Re(\dots) = Re(\dots).$$

3. Se ramener à une somme géométrique:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} (\dots)^{k} = \dots$$

4. Calculer la partie réelle (ou imaginaire) du résultat complexe obtenu:

Dans cet exemple, on est ramenés à la technique de l'angle moyen. On obtient:

Conclusion:

$$\sum_{k=0}^n \cos k = Re(\sum_{k=0}^n e^{ik}) = \frac{\cos(\frac{n}{2})\,\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}\,.$$

3.4.3 Technique de linéarisation

But: transformer une expression contenant des termes en $\cos^p x$ et $\sin^p x$ en termes de la forme $\cos(px)$ et $\sin(px)$.

POINT METHODE 7 : technique de linéarisation.

Exemple 13 Linéariser $\cos^4 x$.

1. Utiliser les formules d'Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \,.$$

2. Utiliser le binôme de Newton et penser à regrouper les termes:

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

3. Utiliser à nouveau les formules d'Euler:

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} \left(6 + 2\cos(4x) + 8\cos(2x) \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

3.5 Application de la formule de Moivre

Rappel 6 : Formule de Moivre.

 $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{R},$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

POINT METHODE 8 : technique d'antilinéarisation.

Exemple 14 Calculer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

1. Utiliser le binôme de Newton pour développer $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$: $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \dots$

2. Utiliser la formule de Moivre pour développer $(\cos\theta+i\sin\theta)^3$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta).$$

3. Égaler les parties réelle et imaginaire des deux expressions précédentes: