Nombres complexes

I. Manipulation de la forme algébrique

Exercice 1 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants:

1. $2(1+i)+i(2i-1)$
2. $\sqrt{2}(1-i)+2\sqrt{2}i(1+i)$
3. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)-\frac{1}{2}(2i+1)$
4. $(1+i)(3+2i)$
5. $\left(2\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)\left(3i\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$
6. $\left(2\sqrt{2}-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)$
7. $\frac{1}{2\sqrt{2}-i}$
8. $\frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1+i}$
9. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
10. $\frac{(2-i)(5+2i)}{3-4i}$
11. $\overline{\left(\frac{1}{2i+4}\right)}$
12. $\overline{\left(\frac{i+3}{1-4i}\right)}$
13. $(1-i\sqrt{2})^2$
14. $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)^2$
15. $(1+i)^3$
16. $(\sqrt{2}-i)^4$
17. $(1+j)^5$
18. $\left(\frac{1}{1+j}\right)^4$.

Exercice 2 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, donner la forme algébrique de : $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$

II. Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

Exercice 3 Donner le module et un argument des complexes suivants:

1. $2-2i$
2. $-1+i\sqrt{3}$
3. $\left(-1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^6$
4. $\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(1+i)^3}$
5. $\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^5}$.
6. $(1+j)^5$
7. $\left(\frac{1}{1+j}\right)^4$.
8. Pour $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\alpha+i\cos\alpha$
9. Pour $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $1+i\tan\alpha$.
10. $\forall n\in\mathbb{N}$, $z_n=(-1)^n+i\sqrt{3}$.

Exercice 4 Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle:

1. $z_1=1+i$
2. $z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$
3. $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$
4. $z_2=1-e^{i\theta}$

Exercice 5 Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

1. $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{2}}$
2. $z_2=\frac{1+e^{i\frac{\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{\pi}{12}}}$
3. $z_1=\left(1+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$
4. $z_1=1+i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 6 Calculer :

1. $(1-i)^{20}$
2. $(1-i\sqrt{3})^7$
3. $(1+i\sqrt{3})^9$

Exercice 7 On considère le nombre complexe $z=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.
Calculer z^2 et en déduire module et argument de z.

Exercice 8 On considère le nombre complexe $z=\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

1. Calculer $|z|$
2. Donner la forme algébrique de z
3. Calculer z^{2022}

Exercice 9 Trouver tous les entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

III. Nombres complexes et trigonométrie

Exercice 10 Soient les complexes $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 - i$.

1. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Mettre $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique.
3. En déduire $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 11 On pose $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$.

1. Déterminer le module et un argument de a, b et ab.
   Trouver la forme algébrique de ab.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

   En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 12 : Formules trigonométriques.
Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, en remarquant que $\cos p + \cos q = Re(e^{ip} + e^{iq})$, retrouver la formule trigonométrique:

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\ \cos(\frac{p-q}{2})$$

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.
On remarquera que $\sin(kx) = Im(e^{ikx})$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\cos(2x) - \sqrt{3}\,\sin(2x) = -\sqrt{2}$ 2. $-\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\,\sin(x) = 1$

Exercice 15 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \lambda$.

1. Pour quelles valeurs de λ cette équation a-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation lorsque $\lambda = \sqrt{2}$.

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sin x - \cos x > 1$ 2. $-\sin(3x) + \sqrt{3}\cos(3x) < 1$

IV. Résolution d'équations

Exercice 17 Exprimer le terme général en fonction de n: $\begin{cases} w_0 = 1, w_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} - w_n \end{cases}$

Exercice 18 Exprimer le terme général en fonction de n: $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}\,u_n \end{cases}$

Exercice 19 Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants: $z_1 = 15 - 8i$ et $z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 20 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + \dfrac{11}{4} = 0$
2. $(1+i)\,z^2 = (2-i)\,z$
3. $z^4 + z^2 - 12 = 0$
4. $2i\overline{z} - i = 2\,(\overline{z} - 5) + i$
5. $\dfrac{\overline{z} - 2i}{\overline{z} - 1} + 1 + i = 0$
6. $\overline{z}^2 - \overline{z} + 1 = 0$.
7. $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$, avec $\theta \in]0, \pi[$.

Exercice 21 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$1 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right) + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = 0\,.$$

on donnera les solutions sous forme algébrique.

V. Calcul de sommes trigonométriques

Exercice 22 Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Exercice 23 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) \text{ et } T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

Exercice 24 Pour tout entier n, on considère la somme:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{(\cos x)^k}$$

1. Pour quels x, S_n est-elle bien définie?
2. Calculer alors $S_n(x)$.

Exercice 25 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que:

$$\forall x \in]0, \pi[\,, \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}\,.$$

2. En déduire les solutions dans $]0, \pi[$ de l'équation:

$$\sin x + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0\,.$$

Exercice 26 Calculer les sommes: $(x \in \mathbb{R})$

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \text{ et } S = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)\,.$$

on pourra calculer $C + S$ et $C - S$.