Nombres complexes – forme exponentielle

I. Valeurs particulières

Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1. $e^{i0} =$; $e^{i\pi} =$; $e^{i\pi/2} =$; $e^{i3\pi/2} =$
2. $e^{i\pi/3} =$; $e^{i\pi/4} =$; $e^{i\pi/6} =$
3. $e^{2i\pi/3} =$

SANS calculs, donner les formes algébriques des complexes suivants :

$$e^{-i\pi/3} = \qquad e^{-i\pi/4} = \qquad e^{-i\pi/6} = \qquad e^{-2i\pi/3} =$$

II. Module et argument

Dire (SANS calculs) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. si $z = re^{i\theta}$ alors $|z| = r$ et $arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}| = 1$.
3. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$.
4. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}| = |e^{-i\theta}|$.
5. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
6. $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} > 0$.
7. $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} \neq 0$.
8. $\exists\, \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} < 0$.
9. $\exists\, \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = 0$.

III. Soit α, $\theta \in \mathbb{R}$.

Dire (SANS calculs) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $e^{i\theta} = 1 \iff i\theta = 0$.
2. $e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 0$.
3. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff i\theta = i\alpha$.
4. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \theta = \alpha$.
5. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \exists\, k \in \mathbb{N}/\theta = \alpha + 2k\pi$.
6. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/\theta = \alpha + 2k\pi$.
7. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/i\theta = i\alpha + 2ik\pi$.
8. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \cos\theta = \cos\alpha$.
9. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \sin\theta = \sin\alpha$.
10. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff (\cos\theta = \cos\alpha \text{ et } \sin\theta = \sin\alpha)$.