Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C- Madame MOREL

TP 4
Boucle WHILE

I. While et random

Dans ce TP, on pourra utiliser les fonctions de la bibliothèque `random` :

- `randrange(n)` : renvoie un nombre aléatoire (loi uniforme) entre 1 et $n-1$. ($n \in \mathbb{N}^*$)
- `randrange(a,b)` : renvoie un nombre aléatoire (loi uniforme) entre a et $b-1$, a et b sont deux entiers tels que $a < b$
- `randint(a,b)` : renvoie un nombre aléatoire (loi uniforme) entre a et b

Exercice 1 On effectue des lancers successifs d'un dé cubique non truqué.

1. Comment simuler en langage `python` un lancer de dé?
2. Écrire une fonction `jeu(valeur)` qui prend en argument une variable `valeur` (un entier compris entre 1 et 6) et qui renvoie le nombre de lancers nécessaires pour obtenir `valeur`.

Exercice 2 Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante:
il est enfermé dans une cage comportant quatre portes, derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant au rat une décharge électrique s'il essaye de les franchir; la quatrième laisse le passage libre.

1. Comment simuler un essai du rat ?
2. Dans cette question, on suppose que le rat abandonne au bout de 20 essais.
   Écrire une fonction Python qui simule l'expérience aléatoire et renvoie
   - le nombre d'essais effectués par le rat s'il trouve la bonne porte au bout des 20 essais.
   - 0 s'il ne trouve pas la bonne porte au bout des 20 essais.
3. Dans cette question, on suppose que le rat n'abandonne jamais. Écrire une fonction Python qui simule l'expérience aléatoire et renvoie le nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.

II. Algorithmes de seuil

Exercice 3 :

1. Ecrire une fonction `premierln(M)` qui prend en argument un réel `M` et qui renvoie le premier entier n tel que $\ln(n) \geqslant M$.
2. Ecrire une fonction `premierexp(M)` qui prend en argument un réel `M` et qui renvoie le premier entier n tel que $e^n \geqslant M$.
3. Ecrire une fonction `premierfacto(M)` qui prend en argument un réel `M` et qui renvoie le premier entier n tel que $n! \geqslant M$.
4. Proposer alors une démarche informatique permettant de vérifier que:

$$\ln(n) << e^n << n!$$

Exercice 4 (série géométrique divergente)
On considère la suite (S_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k\,.$$

1. Écrire une fonction qui teste la monotonie de la suite (S_n).
2. Établir une démarche informatique permettant de conjecturer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Écrire une fonction `premier(M)` qui prend en argument un réel M (positif strictement) et qui renvoie le premier entier n tel que $S_n \geqslant M$.

Exercice 5 (série harmonique)
On considère la suite (S_n) définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

1. Écrire une fonction qui teste la monotonie de la suite (S_n).
   On rappelle notre conjecture: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

2. Écrire une fonction `premier(M)` qui prend en argument un réel M (positif strictement) et qui renvoie le premier entier n tel que $S_n \geqslant M$.

3. Reprendre l'exercice 2, question 1. Commentez.

Exercice 6 (conjecture de Syracuse)
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la fonction définie par :

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 3k+1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

On appelle **suite de Syracuse d'un entier** N la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = N \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = f(u_n)$$

La conjecture de Syracuse affirme que toutes les suites de Syracuse des entiers positifs atteignent la valeur 1 au bout d'un certain temps. Cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers $N \leqslant 2^{69}$ mais on ignore encore si elle est vraie.

1. Écrire une fonction `f(k)` d'argument un entier k ($k \geqslant 1$) et qui renvoie la valeur de $f(k)$

2. Écrire une fonction `Syracuse(N,n)` qui prend en arguments deux entiers N et n, et qui renvoie la valeur de u_n où (u_n) est la suite de Syracuse d'un entier N.
   On vérifiera que `Syracuse(15,9)` renvoie 40

3. Écrire une fonction `Tempsvol(N)` d'argument un entier N , et qui renvoie le premier n tel que le nième terme de la suite de Syracuse d'un entier N vaut 1. *on suppose donc que la conjecture est vérifiée*
   On vérifiera que `Tempsvol(15)` renvoie 17.

Exercice 7 (partie entière)
Écrire une fonction `entierpositif(x)` qui pour tout réel x **positif ou nul**, renvoie le plus grand entier n tel que $n \leqslant x$.