Sommes doubles

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Introduction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne $n \times n$ nombres réels a_{ij}, où $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, que l'on représente dans un tableau à n lignes et n colonnes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

L'indice i désigne le numéro de la ligne et l'indice j celui de la colonne.
La somme de tous les éléments de ce tableau est notée: $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$.

But: Calculer cette somme double $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$. Pour cela, on distingue plusieurs manières.

1.1 Sommation des termes ligne par ligne

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & \longrightarrow & a_{11} + \ldots + a_{1j} + \ldots + a_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & \longrightarrow & a_{i1} + \ldots + a_{ij} + \ldots + a_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & \longrightarrow & a_{n1} + \ldots + a_{nj} + \ldots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{array}$$

Conclusion: en sommant ligne par ligne, on obtient

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$$

1.2 Sommation des termes colonne par colonne

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1} & & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} & & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{array}$$

Conclusion: en sommant colonne par colonne, on obtient

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right).$$

Finalement:

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)}$$

Remarque 1 Il n'y a pas toujours autant de lignes que de colonnes ... Dans ce cas,

$$\forall n,p \in \mathbb{N}^*\,,\ \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right).$$

Exemple 1 $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} (i+j)$.

2 Calcul de sommes doubles

Soit A une partie finie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. On veut calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{ij}$, où les a_{ij} sont des réels donnés.
Tout dépend de l'ensemble A ...

2.1 Sommes indexées par un rectangle

Dans ce paragraphe, A est de la forme: $\boxed{A = I\times J,\text{ où } I \text{ et } J \text{ sont deux parties finies de } \mathbb{N}}$
Soient $n,m,p,q\in\mathbb{N}$, $I=\{n,n+1,\dots,m\}$ et $J=\{p,p+1,\dots,q\}$, c'est la généralisation de l'Introduction:

$$\begin{matrix} a_{n,m} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,m} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,q} \end{matrix}$$

Formule:

2.2 Somme indexée par la diagonale d'un carré

Dans ce paragraphe, A est de la forme: $\boxed{A = \{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \,/\, i=j\}}$
On somme les termes de la diagonale:

$$\begin{matrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \boxed{a_{ii}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{matrix}$$

On est alors ramené à une somme "simple":

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i=j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

2.3 Sommes indexées par un triangle

2.3.1 SOUS la diagonale

Considérons un ensemble A de la forme: $\boxed{A = \{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2 \,/\, i\geqslant j\}}$
On somme tous les termes situés en dessous de la diagonale (diagonale incluse car l'inégalité est large):

$$\begin{array}{cccccc}
\boxed{a_{11}} & & & & & \\
\boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & \\
\boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{ii}} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
\boxed{a_{n1}} & \boxed{a_{n2}} & \cdots & \boxed{a_{ni}} & \cdots & \boxed{a_{nn}}
\end{array}$$

Sommation ligne par ligne:

L_1: a_{11}

L_2: $a_{21} + a_{22} = \sum_{j=1}^{2} a_{2j}$

L_3: $a_{31} + a_{32} + a_{33} =$

$\vdots$

L_i:

$\vdots$

L_n: $a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = \sum_{j=} a_{nj}$

En sommant:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=} \sum_{j=} a_{ij}$$

Sommation colonne par colonne:

C_1:

$\vdots$

C_j:

$\vdots$

C_{n-1}:

C_n:

En sommant:

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=} \sum_{i=} a_{ij}.$$

Conclusion:

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}}$$

Remarque 2 :

(1) Généralisation: Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $A = \{(k,l)/m \leqslant k \leqslant l \leqslant n\}$, alors: Conclusion:

$$\boxed{\sum_{m \leqslant k \leqslant l \leqslant n} a_{kl} = \sum_{k=} \sum_{l=} a_{kl} = \sum_{l=} \sum_{k=} a_{kl}}$$

(2) ATTENTION! Les indices de sommation sont liés, donc attention au changement d'ordre des signes $\sum$!

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{i} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ ou $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij} = \sum_{i=j}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ N'A AUCUN SENS!!!

(3) Le choix du bon ordre de sommation (i puis j ou j puis i) est la **première étape fondamentale** du calcul: elle le simplifie, voire le rend possible...

Exemple 2 $\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (i+j)$.

1. Écrire les deux ordres possibles:

2. Choisir le bon!

Remarque 3 : sommation des termes <u>strictement</u> en dessous de la diagonale

$$\boxed{\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=} \sum_{j=} a_{ij} = \sum_{j=} \sum_{i=} a_{ij}}$$

2.3.2 AU DESSUS de la diagonale

Considérons un ensemble A de la forme: $\boxed{A = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,/\, i \leqslant j\}}$
On somme tous les termes situés au dessus de la diagonale (diagonale incluse car l'inégalité est large):

Remarque 4 : sommation des termes <u>strictement</u> au dessus de la diagonale

$$\boxed{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=} \sum_{j=} a_{ij} = \sum_{j=} \sum_{i=} a_{ij}}$$